উচ্চ মাধ্যমিক

বীজগণিত

ডক্টর জ্ঞানেন্দ্রগোপাল চক্রবর্ত্তী
ডক্টর প্রভাতরঞ্জন ঘোষ

বীজগণিত

(উচ্চ-মাধ্যমিক শ্রেণীর জন্য)

শ্রীজ্ঞানেন্দ্রগোপাল চক্রবর্ত্তী, এম. এস্. সি., ডি. ফিল.
(স্যার আশুতোষ মুখোপাধ্যায় স্বর্ণ-পদক ও গ্রিফিথ পুরস্কার প্রাপ্ত)
কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের ফলিত গণিতের রীডার,
বঙ্গবাসী কলেজের ভূতপূর্ব অধ্যাপক।

এবং

শ্রীপ্রভাতরঞ্জন ঘোষ, এম. এস্. সি., ডি. ফিল.
কলিকাতা বিদ্যাসাগর সান্ধ্য কলেজের গণিত বিভাগের প্রধান
ও কলিকাতা সুরেন্দ্রনাথ কলেজের অধ্যাপক।

মৌলিক লাইব্রেরী
১৮বি, শ্যামাচরণ দে স্ট্রীট
কলিকাতা-৭০০০৭৩

প্রকাশক :
শ্রীদীপ্তেন্দ্রনাথ মৌলিক
মৌলিক লাইব্রেরী
১৮-বি শ্যামাচরণ দে স্ট্রীট
কলিকাতা-৭০০০৭৩

প্রথম সংস্করণ—অক্টোবর, ১৯৭৬
দ্বিতীয় সংস্করণ—অক্টোবর, ১৯৭৮

[ভারত সরকার কর্তৃক প্রদত্ত স্বল্প মূল্যের কাগজে মুদ্রিত]

মূল্য : নয় টাকা মাত্র

মুদ্রাকর :
শ্রীঅনিলকুমার ঘোষ
শ্রীহরি প্রেস
১৩৫এ, মুক্তারামবাবু স্ট্রীট
কলিকাতা-৭০০০০৭

দ্বিতীয় সংস্করণের ভূমিকা

অল্প সময়ের মধ্যে প্রথম সংস্করণের মুদ্রিত পুস্তক নিঃশেষিত হওয়ায় অনুমান করা যাইতেছে যে, বর্তমান পুস্তকখানি শিক্ষক ও ছাত্র মণ্ডলীর নিকট সমাদৃত হইয়াছে। দ্বিতীয় সংস্করণ প্রকাশের সময় আলোচিত বিষয়বস্তুর কোন রকম পরিবর্তন না করিয়া কোন কোন স্থান পরিমার্জিত করায় পুস্তকখানির মান উন্নততর হইয়াছে। ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক সূচকের ক্ষেত্রে দ্বিপদ উপপাদ্য এবং অসীম শ্রেণীর আলোচনায় অধ্যায়গুলির সুসন্নিবেশ ইহার উৎকর্ষতা বৃদ্ধি করিবে।

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের ফলিত গণিত বিভাগের প্রধান অধ্যাপক শ্রীযুত পরিমল কান্তি ঘোষ মহাশয়ের অকৃপণ উপদেশ পুস্তকখানির পরিমার্জণে আমাদের প্রভূত সহায়তা করিয়াছে। তাঁহাকে আমাদের সশ্রদ্ধ ধন্যবাদ জানাইতেছি। যে-সকল বন্ধুবর তাঁহাদের গঠনমূলক সমালোচনার দ্বারা আমাদের পুস্তকখানি উন্নততর করিবার প্রয়াসকে সাহায্য করিয়াছেন তাঁহাদের মধ্যে বঙ্গবাসী কলেজের অধ্যাপক বারীন্দ্রনাথ ঘোষ, বহরমপুর কলেজের অধ্যাপক রাজকৃষ্ণ মাল, পুরুলিয়া কলেজের অধ্যাপক শক্তি সাধন বসু, বিষ্ণুপুর রামানন্দ কলেজের অধ্যাপক রতন কুমার রায়, আসানসোল বি. বি. কলেজের অধ্যাপক বীরেন্দ্রনাথ সাহা, মেদিনীপুর কলেজের অধ্যাপক অনিলকুমার কর, বেথুন কলেজের ডক্টর শিপ্রা সেনশর্মা, বেহালা কলেজের অধ্যাপিকা অনুরাধা সেন, তারকেশ্বর হাই-স্কুলের শিক্ষক কার্তিকচন্দ্র পাত্র, প্রভৃতির নাম ধন্যবাদের সহিত উল্লেখ করিতেছি।

বিজ্ঞান কলেজ,
কলিকাতা,
৮ই অক্টোবর, ১৯৭৮

শ্রীজ্ঞানেন্দ্রগোপাল চক্রবর্তী
শ্রীপ্রভাতরঞ্জন ঘোষ

প্রথম সংস্করণের ভূমিকা

শিক্ষার পুনর্গঠিত ছক অনুযায়ী উচ্চতর মধ্যশিক্ষা পর্ষদ-রচিত পাঠ্যক্রম অনুসারে **বীজগণিত** পুস্তকখানি রচিত হইল। শিক্ষায় শ্রেণী বিভাগ নির্দিষ্ট লক্ষ্যে পৌঁছাইবার সোপান। ইহার বিভিন্ন স্তরের সহিত নিবিড় সম্পর্ক না থাকিলে শিক্ষাদান ফলপ্রসূ হয় না। এই পুস্তক প্রণয়ন বর্তমান গ্রন্থকারদ্বয়ের কলেজীয় উচ্চতর বীজগণিত ও মাধ্যমিক বিদ্যালয়ের বীজগণিত প্রণয়নের মধ্যেকার শূন্যস্থান পূরণ মাত্র। বহুদিনের অধ্যয়ন ও অধ্যাপনায় অর্জিত অভিজ্ঞতা শিক্ষার্থীমনের চাহিদার প্রতি সজাগ লক্ষ্য রাখিতে সাহায্য করিয়াছে। পুস্তকখানিতে প্রভূত পরিমাণ উদাহরণ ও প্রশ্নমালার সংযোজন শিক্ষার্থীগণের আগ্রহ ও ঔৎসুক্য বৃদ্ধিতে সহায়তা করিবে। পরিশেষে যুক্ত পাঁচ অঙ্কের লগ-তালিকা শিক্ষার্থীগণের বিশেষ উপকারে লাগিবে।

যথাযথ মনোনিবেশ সত্ত্বেও সময়ের স্বল্পতার জন্য মুদ্রণ প্রমাদ বা অন্যান্য ত্রুটি অবশ্যই ঘটিয়া থাকিতে পারে। পুস্তকের উৎকর্ষ সাধনে ত্রুটি সংশোধনের যে-কোন প্রস্তাব সমাদরে গৃহীত হইবে।

পরিশেষে পুস্তক প্রকাশনায় সুপ্রতিষ্ঠিত প্রকাশক সংস্থা মৌলিক লাইব্রেরীর সুযোগ্য পরিচালক শ্রীযুক্ত দীপ্তেন্দ্রনাথ মৌলিক মহাশয়কে তাঁহার ধৈর্য্য ও নিষ্ঠার জন্য এবং শ্রীহরি প্রেসের মালিক ও কর্মচারীবৃন্দকে তাঁহাদের অক্লান্ত পরিশ্রমের জন্য কৃতজ্ঞতা জ্ঞাপন করি।

বিজ্ঞান কলেজ,
কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়,
১৫ই অক্টোবর, ১৯৭৬

ইতি
শ্রীজ্ঞানেন্দ্রগোপাল চক্রবর্তী
শ্রীপ্রভাতরঞ্জন ঘোষ

SYLLABUS

Mathematics Paper I :—100 marks

Algebra, Trigonometry and Analytical Geometry of Two Dimensions

Algebra :— 30 marks :

Variation, Arithmetical Progression, Geometrical Progression. Surds. Laws of indices. Complex numbers. Theory of quadratic equation. Permutations and Combinations. Binomial theorem for positive integral index ; Idea of Infinite series—sum of infinite G. P. series. Use of Binomial theorem for fractional and negative indices. Logarithms—Compound interest and annuities. Use of logarithmic and exponential series.

সূচীপত্র

বীজগণিত

প্রথম অধ্যায়

সূচক নিয়মাবলী (Laws of Indices)

1·1. সূচক ঃ কোনও রাশিকে সেই রাশিদ্বারা বারবার গুণ করিলে গুণফলে একই রাশি পাশাপাশি না বসাইয়া যত সংখ্যক একই রাশি গুণ করা হইল, সেই সংখ্যাটিকে উক্ত রাশির মাথার দক্ষিণ পার্শে ক্ষুদ্রাকারে লিখিয়া উৎপাদক সংখ্যাকে সূচিত করা হয়। ঐ সংখ্যাটিকে ঐ রাশিটির **সূচক** (index), **ঘাত** বা **শক্তি** (power) এবং রাশিটিকে **নিধান** (base) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, $a\times a$-কে লেখা হয় a^2, $a\times a\times a$-কে লেখা হয় a^3, ইত্যাদি। a^m-এর অর্থ $a\times a\times a\times\cdots\cdots m$-সংখ্যক a-এর গুণফল। এখানে 2, 3, m, ইত্যাদি সংখ্যাগুলি a রাশিটির সূচক।

1·2. মূল ঃ n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং $x^n=a$ হইলে x-কে a-এর n-তম **মূল** (root) বলা হয় এবং ইহাকে $\sqrt[n]{a}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। সুতরাং $\sqrt[n]{a}$ এরূপ একটি সংখ্যা বুঝায় যাহার n-তম শক্তি হইল a অর্থাৎ $(\sqrt[n]{a})^n=a$. $n=2$ হইলে a-এর বর্গমূল পাওয়া যায় এবং ইহাকে $\sqrt{a}$ লেখা হয়।

1·3. সূচক নিয়মাবলী ঃ m ও n দুইটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে, (i) $a^m\times a^n=a^{m+n}$

(ii) $a^m\div a^n=a^{m-n}$, $(m>n)$

(iii) $(a^m)^n=a^{mn}$

(iv) $(ab)^m=a^mb^m$.

প্রমাণ ঃ (i) $a^m=a\times a\times a\times\cdots\cdots m$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত,

$a^n=a\times a\times a\times\cdots\cdots n$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত।

$\therefore\ a^m\times a^n=a\times a\times a\times\cdots\cdots(m+n)$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$=a^{m+n}$.

এই নিয়মটিকে **মূল সূচক নিয়ম** (Fundamental law of indices) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ m, n ও p ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে,

$$a^m\times a^n\times a^p=a^{m+n+p}.$$

গুণনীয়কের সংখ্যা যাহাই হউক না কেন, উপরোক্ত নিয়ম সর্বক্ষেত্রেই প্রযোজ্য হইবে। উদাহরণস্বরূপ, $a^2\times a^3\times a^5\times a^7=a^{2+3+5+7}=a^{17}$.

(ii) $a^m \div a^n = a^m \times \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{a \times a \times a \times \cdots\cdots m\text{-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}{a \times a \times a \times \cdots\cdots n\text{-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}$

[$m > n$ বলিয়া, লব ও হর হইতে n-সংখ্যক গুণনীয়ক অপসারিত করিলে]

$= a \times a \times a \times \cdots\cdots (m-n)$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m-n}$.

অনুসিদ্ধান্ত : $a^0 = a^{m-m} = a^m \div a^m = 1$,

অর্থাৎ শূন্য ব্যতীত যে-কোন রাশির সূচক শূন্য হইলে উহার মান এক হইবে।

(iii) মনে কর, $a^m = b$.

$\therefore \quad (a^m)^n = b^n = b \times b \times b \times \cdots\cdots n$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^m \times a^m \times a^m \times \cdots\cdots n$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m+m+m+\cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}}$

$= a^{m \times n} = a^{mn}$.

(iv) $(ab)^m = ab \times ab \times ab \times \cdots\cdots m$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= (a \times a \times a \times \cdots\cdots m$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত$) \times$

$(b \times b \times b \times \cdots\cdots m$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত $)$

$= a^m \times b^m = a^m b^m$.

অনুসিদ্ধান্ত : $(abcd\cdots\cdots)^m = a^m b^m c^m d^m \cdots\cdots$

1·4. ঋণাত্মক সূচক : n একটি ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে a^n-এর পূর্বের সংজ্ঞা অর্থহীন হইয়া পড়ে। এক্ষেত্রে আমরা মূল সূচক নিয়মটি অর্থাৎ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ এই নিয়মটি ধরিয়া লইব।

মনে কর, m একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। এখন, $n = -m$ বসাইলে,

$$a^m \times a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1.$$

$$\therefore \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

সুতরাং a^{-m} হইল a^m-এর অন্যোন্যক (reciprocal)।

m ও n ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে সূচকের অন্যান্য নিয়মগুলির সত্যতা প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ, $(a^m)^n = a^{mn}$ নিয়মে m ও n ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে, মনে কর, $m = -p$ এবং $n = -q$, এখানে p ও q ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

$$\therefore \quad (a^m)^n = (a^{-p})^{-q} = \frac{1}{(a^{-p})^q} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)^q} = \frac{1}{\frac{1}{a^{pq}}} = a^{pq} = a^{(-p)(-q)} = a^{mn}.$$

অনুসিদ্ধান্ত : $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \left(a \times \dfrac{1}{b}\right)^m = (a.b^{-1})^m = a^m (b^{-1})^m = a^m b^{-m} = \dfrac{a^m}{b^m}$.

1·5. ভগ্নাংশ সূচক : n একটি ভগ্নাংশ (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) হইলে a^n-এর পূর্বের সংজ্ঞা অর্থহীন হইয়া পড়ে। এক্ষেত্রেও আমরা মূল সূচক নিয়মটি অর্থাৎ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ এই নিয়মটি ধরিয়া লইব।

q একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে, এই নিয়মের একাধিকবার প্রয়োগে, আমরা পাই,

$$(a^{\frac{1}{q}})^q = a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times \cdots\cdots q\text{-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}$$

$$= a^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\cdots\cdots q \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত}}$$

$$= a^{\frac{1}{q}\times q} = a. \qquad \therefore \quad \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = a.$$

সুতরাং, $a^{\frac{1}{q}}$-এর অর্থ হইল a-এর q-তম মূল, অর্থাৎ $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$.

p এবং q ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে, অনুরূপভাবে দেখান যায় যে,

$$(a^{\frac{p}{q}})^q = a^p.$$

$\therefore$ $a^{\frac{p}{q}}$কে a^p-এর q-তম মূল বলে।

আবার, $a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p = (\sqrt[q]{a})^p$ বলিয়া, $a^{\frac{p}{q}}$কে a-এর q-তম মূলের p-তম শক্তি বলে।

m ও n ভগ্নাংশ (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) হইলে সূচকের অন্যান্য নিয়মগুলির সত্যতা প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ, $(a^m)^n = a^{mn}$ নিয়মে,

n একটি ভগ্নাংশ $\left(=\frac{p}{q}, p \text{ ও } q \text{ প্রত্যেকে একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা}\right)$ হইলে,

$$(a^m)^n = (a^m)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^m)^p} = \sqrt[q]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{q}} = a^{mn}.$$

টীকা 1. সর্বক্ষেত্রে $\sqrt[q]{a^p}$ এবং $(\sqrt[q]{a})^p$ সমান নহে। যেমন, $(\sqrt[2]{4})^4 = (\pm 2)^4 = 16$; কিন্তু $\sqrt[2]{4^4} = \sqrt[2]{256} = \pm 16$.

টীকা 2. m ও n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে $a^m \times a^n = a^{m+n}$, এই মূল সূচক নিয়মটির সত্যতা প্রমাণ করা হইয়াছে। m ও n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা না হইলে (অর্থাৎ m ও n ঋণাত্মক, ভগ্নাংশ বা শূন্য হইলে) উপরোক্ত নিয়মটির সত্যতা আমরা ধরিয়া লই। এই কল্পনার উপর নির্ভর করিয়াই আমরা ঋণাত্মক সূচক এবং ভগ্নাংশ সূচকের অর্থ নিরূপণ করি এবং অন্যান্য সূচক নিয়মগুলিও প্রমাণ করি।

16. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. $a^{2m}+a^mb^{-n}+b^{-2n}$ কে a^m-b^{-n} দ্বারা গুণ কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(a^m-b^{-n})(a^{2m}+a^mb^{-n}+b^{-2n})$

$$=(a^m-b^{-n})\{(a^m)^2+a^m.b^{-n}+(b^{-n})^2\}$$

$$=(a^m)^3-(b^{-n})^3=a^{3m}-b^{-3n}.$$

উদাহরণ 2. $(a+b)$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$a+b=(a^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}})^3=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})\{(a^{\frac{1}{3}})^2-a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}+(b^{\frac{1}{3}})^2\}$$

$$=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}).$$

উদাহরণ 3. দেখাও যে,

$$\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q}\times\left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r}\times\left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p}=1.$$

বামপক্ষ $=(x^{p-q})^{p+q}\times(x^{q-r})^{q+r}\times(x^{r-p})^{r+p}$

$$=x^{(p-q)(p+q)}\times x^{(q-r)(q+r)}\times x^{(r-p)(r+p)}$$

$$=x^{p^2-q^2+q^2-r^2+r^2-p^2}$$

$=x^0=1=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 4. সরল কর ঃ

$$\frac{1}{1+a^{m-l}+a^{n-l}}+\frac{1}{1+a^{l-m}+a^{n-m}}+\frac{1}{1+a^{l-n}+a^{m-n}}.$$

প্রথম পদের লব ও হরকে a^l দ্বারা, দ্বিতীয় পদের লব ও হরকে a^m দ্বারা এবং তৃতীয় পদের লব ও হরকে a^n দ্বারা গুণ করিলে,

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{a^l}{a^l+a^m+a^n}+\dfrac{a^m}{a^m+a^l+a^n}+\dfrac{a^n}{a^n+a^l+a^m}$

$$=\frac{a^l+a^m+a^n}{a^l+a^m+a^n}=1.$$

উদাহরণ 5. $x^{m^n}=(x^m)^n$ হইলে, m-কে n-এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

$x^{m^n}=(x^m)^n=x^{mn}$ বলিয়া $m^n=mn$

অথবা, $\dfrac{m^n}{m}=n$

অথবা, $m^{n-1}=n$ অর্থাৎ $m=n^{\frac{1}{n-1}}$.

উদাহরণ 6. $a^x = b^y = c^z$ এবং $b^2 = ac$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$.

মনে কর, $a^x = b^y = c^z = k$.

$\therefore \quad a = k^{\frac{1}{x}},\ b = k^{\frac{1}{y}}$ এবং $c = k^{\frac{1}{z}}$.

a, b, c-এর এই মান $b^2 = ac$-তে বসাইলে,

$(k^{\frac{1}{y}})^2 = k^{\frac{1}{x}}.k^{\frac{1}{z}}$, অর্থাৎ $k^{\frac{2}{y}} = k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}$.

$$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}.$$

উদাহরণ 7. $a = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}$ হইলে, দেখাও যে, $a^3 - 3a = x + x^{-1}$.

$$a = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \quad a^3 = (x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})^3$$

$$= (x^{\frac{1}{3}})^3 + (x^{-\frac{1}{3}})^3 + 3.x^{\frac{1}{3}}.x^{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})$$

$$= x + x^{-1} + 3.1\,a.$$

$$\therefore \quad a^3 - 3a = x + x^{-1}.$$

উদাহরণ 8. সমাধান কর : $x^y = y^x,\quad x = 2y$.

$$x^y = y^x \quad \cdots \quad (1)$$

$$x = 2y \quad \cdots \quad (2)$$

(1) সমীকরণে (2) বসাইলে, $(2y)^y = y^{2y} = (y^2)^y$

$\therefore \quad 2y = y^2$

অথবা, $y^2 - 2y = 0$

অথবা, $y(y-2) = 0$ অর্থাৎ, $y = 0$ বা 2.

$y = 0$ সমীকরণ (1)-কে সিদ্ধ করে না বলিয়া, $y = 2$.

$\therefore$ (2) হইতে, $x = 2.2 = 4$.

$\therefore \quad x = 4,\ y = 2$.

টীকা : a, x, y তিনটি বাস্তব রাশি এবং $a^x = a^y$ হইলে $x = y$ হইবে, যদি a-এর মান 0, 1, ∞ না হয়।

আবার, a, b, x তিনটি বাস্তব রাশি এবং $a^x = b^x$ ও $a \neq b$ হইলে, হয় $a = b$ হইবে, অথবা $x = 0$ হইবে।

প্রশ্নমালা I

1. $x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{5}}$-কে মূলচিহ্ন দ্বারা প্রকাশ কর।

2. $x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}$ কে $x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}$ দ্বারা গুণ কর।

3. $a^{\frac{1}{2}}+1+a^{-\frac{1}{2}}$কে $a^{\frac{1}{4}}-1+a^{-\frac{1}{4}}$ দ্বারা গুণ কর।

4. $x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{3}{2}}+3x+y^{\frac{3}{2}}$ কে $x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$ দ্বারা ভাগ কর।

5. $(a-b)$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

6. $\left\{\sqrt[3]{4}\times\frac{1}{\sqrt[6]{8}}\times\sqrt[12]{2^{-1}}\right\}^{\frac{1}{4}}$ এবং $\left[\sqrt[3]{4}\times\frac{1}{\sqrt[9]{8}}\times\sqrt[12]{16^{-1}}\right]^{\frac{1}{12}}$-এর মান নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

প্রমাণ কর (7-12) :

7. $\left(\frac{a^q}{a^r}\right)^p\times\left(\frac{a^r}{a^p}\right)^q\times\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^r=1.$

8. $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n-l}\times\left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l-m}\times\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m-n}=1.$

9. $\sqrt[xy]{\frac{a^x}{a^y}}\times\sqrt[yz]{\frac{a^y}{a^z}}\times\sqrt[zx]{\frac{a^z}{a^x}}=1.$

10. $\left(a^{\frac{1}{x-y}}\right)^{\frac{1}{x-z}}\times\left(a^{\frac{1}{y-z}}\right)^{\frac{1}{y-x}}\times\left(a^{\frac{1}{z-x}}\right)^{\frac{1}{z-y}}=1.$

11. $\left(x^{\frac{b+c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}}\times\left(x^{\frac{c+a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}}\times\left(x^{\frac{a+b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}}=1.$

12. $(1+x^{m-n}+x^{m-p})^{-1}+(1+x^{n-p}+x^{n-m})^{-1}+(1+x^{p-m}+x^{p-n})^{-1}=1.$

সরল কর (13-15) :

13. (i) $\sqrt[3]{a^{-2}}.\,b\times\sqrt[3]{b^{-2}}.\,c\times\sqrt[3]{c^{-2}}.\,a$

(ii) $\left[81^{-\frac{3}{4}}\times\frac{16^{\frac{1}{4}}}{6^{-2}}\times\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{3}}.$

(iii) $(a+b)^m\times(a-b)^m\times(a^2+b^2)^m$

(iv) $(8x^3\div27a^{-3})^{\frac{2}{3}}\times(64x^3\div27a^{-3})^{-\frac{2}{3}}.$

14. (a) $\dfrac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^m\left(p-\frac{1}{q}\right)^n}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^m\left(q-\frac{1}{p}\right)^n}.$ (b) $\dfrac{2^{m+2}.\,3^{2m-n}.\,5^{m+n+2}.\,6^n}{6^m.\,10^{n+2}.\,15^m}.$

(c) $\left\{\dfrac{4^{m+\frac{1}{4}}\times\sqrt{2.2^m}}{2.\,\sqrt{2^{-m}}}\right\}^{\frac{1}{m}}.$ [W.B.B.H.S.]

15 $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{x}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \div \left(\frac{x^a}{x^c}\right)^{c^2+ca+a^2}$.

16. $a^{p^q} = \left(a^{\sqrt{p}}\right)^q$ হইলে, p-কে q-এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

17. (i) $a=xy^{p-1}$, $b=xy^{q-1}$ এবং $c=xy^{r-1}$ হইলে,

দেখাও যে, $a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q}=1$.

(ii) $x=a^{q+r}b^p$, $y=a^{r+p}b^q$ এবং $z=a^{p+q}b^r$ হইলে,

দেখাও যে, $x^{q-r}y^{r-p}z^{p-q}=1$.

18. (i) $x=y^a$, $y=z^b$ এবং $z=x^c$ হইলে, দেখাও যে, $abc=1$.

(ii) $p=a^x$, $q=a^y$ এবং $a^2=(p^yq^x)^z$ হইলে, দেখাও যে, $xyz=1$.

19. (i) $x^{\frac{1}{a}}=y^{\frac{1}{b}}=z^{\frac{1}{c}}$ এবং $xyz=1$ হইলে, দেখাও যে, $a+b+c=0$.

(ii) $a^x=b^y=c^z$ এবং $abc=1$ হইলে, দেখাও যে, $xy+yz+zx=0$.

(iii) $x^y=y^x$ হইলে, দেখাও যে, $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=x^{\frac{x}{y}-1}$

এবং $x=3y$ হইলে, দেখাও যে, $y^2=3$.

20. (i) $x=a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}$ হইলে, দেখাও যে, $x^3+3x=a-a^{-1}$.

(ii) $a=2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}$ হইলে, দেখাও যে, $a^3-6a=6$.

(iii) $c=1+3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}$ হইলে, দেখাও যে, $c^3-3c^2-6c=4$.

(iv) $p=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ হইলে, দেখাও যে,

$(p-p^{-1})^3+3(p-p^{-1})+2=0$.

সমাধান কর (21-25) :

21. $2^{x+1}+2^{x+2}=48$. 22. $9^x+27=4\cdot 3^{x+1}$.

23. (i) $\frac{5^x}{5^y}=25$, $\frac{4^y}{2^x}=2$.

(ii) $2^x-3^y+1=0$, $2^{x-1}+3^{y+1}=31$.

24. $x^y=y^x$, $x^3=y^2$.

25. (i) $3^x=9^y$, $4^{x+1}=8^{xy}$.

(ii) $3^x.9^y=27^z$, $4^x.8^y=32^z$, $2^x.5^y.7^z=70$.

দ্বিতীয় অধ্যায়

করণী (Surds)

2·1. **সংজ্ঞা ঃ** যদি কোন সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায় তবে সেই সংখ্যাকে **মূলদ** (rational) সংখ্যা বলে।

উদাহরণস্বরূপ, 2, $\frac{3}{4}$, ·7, ইত্যাদি, হইল মূলদ সংখ্যা। '0' একটি মূলদ সংখ্যা।

যে-রাশিকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায় না, তাহাকে **অমূলদ** (irrational) রাশি বলে।

উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, π, ইত্যাদি, হইল অমূলদ রাশি।

যদি কোন রাশির কোন মূল সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা না যায়, তাহা হইলে সেই মূলকে **করণী** বলে। উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, ইত্যাদি, হইল করণী। করণীর আকারে থাকিলেও $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{27}$, ইত্যাদি প্রকৃতপক্ষে করণী নহে ; কারণ, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt[3]{27}=3$, ইত্যাদি। বীজগণিতীয় রাশি $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$-কে করণী বলা হয়, যদিও a, b-এর সকল মানের জন্যই $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$ প্রকৃতপক্ষে করণী নহে।

1 সেন্টিমিটার দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য হইল $\sqrt{2}$ সেন্টিমিটার। এই $\sqrt{2}$-কে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায় না অর্থাৎ $\sqrt{2}$ একটি অমূলদ রাশি ; কিন্তু ইহার নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য আছে। ইহার মান যে-কোন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করা যায় বটে, কিন্তু সেই মানকে কখনও এককের ঠিক সম্পূর্ণ গুণিতক বা অংশরূপে প্রকাশ করা যায় না। এইরূপ রাশিকে **অমেয়** (incommensurable) রাশি বলে। সমস্ত করণীই অমেয় এবং অমূলদ রাশি।

করণীর মূল-সূচক সংখ্যাটির দ্বারা উহার **ক্রম** (order) প্রকাশিত হয়। উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{2}$-এর ক্রম হইল দুই—ইহাকে দ্বিঘাত (quadratic) বা দ্বিতীয় ক্রমের (second order) করণী বলে ; $\sqrt[3]{5}$-এর ক্রম হইল তিন—ইহাকে ত্রিঘাত (cubic) বা তৃতীয় ক্রমের (third order) করণী বলে ; $\sqrt[n]{a}$-এর ক্রম হইল n —ইহাকে n-তম ক্রমের (n^{th} order) করণী বলে।

দুই বা ততোধিক করণীর ক্রম সমান হইলে উহাদের **সমমূলীয়** (eqiradical) করণী বলে। উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{2}$, $2^{\frac{2}{4}}$ হইল সমমূলীয় করণী।

দুই বা ততোধিক করণীর ক্রম অসমান হইলে উহাদের **অসমমূলীয়** করণী বলে। উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ হইল অসমমূলীয় করণী।

কোন করণীতে মূলদ উৎপাদক না থাকিলে সেই করণীকে **শুদ্ধ** (pure) করণী বলে। উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, ইত্যাদি, হইল শুদ্ধ করণী।

যে-করণীতে কোন মূলদ উৎপাদক থাকে, তাহাকে **মিশ্র** (mixed) করণী বলে। উদাহরণস্বরূপ, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt[3]{5}$, ইত্যাদি, হইল মিশ্র করণী।

একটি মাত্র পদবিশিষ্ট করণীকে **সরল** (simple) করণী বলে। উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt[3]{2}$, $2\sqrt{3}$, ইত্যাদি, হইল সরল করণী। একাধিক করণী '+' বা '−' চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকিলে তাহাকে **যৌগিক** (compound) করণী বলে।

উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{3}+2\sqrt{5}$, $\sqrt{6}-\sqrt[3]{7}+3\sqrt{11}$, ইত্যাদি, হইলযৌগিক করণী।

দুইটি করণীর বা একটি করণী ও একটি মূলদ সংখ্যার বীজগণিতীয় সমষ্টিকে **দ্বিপদ** (binomial) করণী বলে। উদাহরণস্বরূপ, $2+\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}-\sqrt{6}$, ইত্যাদি, হইল দ্বিপদ করণী।

অনুরূপে, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $5-\sqrt[3]{6}+2\sqrt{7}$, ইত্যাদিকে, **ত্রিপদ** (trinomial করণী বলা হয়।

যদি দুই বা ততোধিক করণীকে একই অমূলদ উৎপাদক বিশিষ্টরূপে প্রকাশ করা যায় তবে উহাদিগকে **সদৃশ** (like বা similar) করণী বলে।

উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$ হইল সদৃশ করণী ; কারণ $\sqrt{18}=3\sqrt{2}, \sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

যদি দুই বা ততোধিক করণীকে একই অমূলদ উৎপাদক বিশিষ্টরূপে প্রকাশ করা না যায় তবে উহাদিগকে **অসদৃশ** (unlike বা dissimilar) করণী বলে। উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$ হইল অসদৃশ করণী ; কারণ, $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

দুইটি দ্বিপদবিশিষ্ট করণীর পদ দুইটি একই হইলে এবং উহাদের সংযোগকারী চিহ্নটি বিপরীত হইলে একটি করণীকে অপরটির **প্রতিযোগী** বা **অনুবন্ধী** (conjugate) বা **পূরক** (complementary) করণী বলে।

উদাহরণস্বরূপ, $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ও $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ করণী দুইটির একটি অপরটির অনুবন্ধী।

2·2. করণী-নিরসন ঃ

একটি করণীকে অন্য কোন একটি করণী দ্বারা গুণ করিয়া মূলদ রাশিতে পরিণত করার পদ্ধতিকে করণী-নিরসন (rationalisation of surd) বলে। ঐ দুইটি করণীর একটিকে অপরটির **করণী-নিরসক উৎপাদক** বলে।

যেমন, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ করণী দুইটির একটি অপরটির করণী-নিরসক উৎপাদক কারণ, $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$;

$\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{25}$ করণী দুইটির একটি অপরটির করণী-নিরসক উৎপাদক, কারণ, $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{125}=5$; ইত্যাদি।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{b}$ করণীর করণী-নিরসক উৎপাদক নির্ণয় ঃ

মনে কর, $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}=x$ এবং $\sqrt[n]{b}=b^{\frac{1}{n}}=y$. m ও n-এর ল. সা. গু. p হইলে, x^p, y^p এবং x^p-y^p মূলদ হইবে।

এখন p জোড় বা বিজোড় পূর্ণসংখ্যা যাহাই হউক না কেন,

$$x^p-y^p=(x-y)(x^{p-1}+x^{p-2}y+\cdots\cdots+y^{p-1}).$$

সুতরাং, $(x-y)$-এর করণী-নিরসক উৎপাদক হইল,

$$x^{p-1}+x^{p-2}y+\cdots\cdots+y^{p-1}.$$

অনুরূপভাবে, $\sqrt[m]{a}+\sqrt[n]{b}$ অর্থাৎ $(x+y)$-এর করণী-নিরসক উৎপাদক হইবে $x^{p-1}-x^{p-2}y+\cdots+xy^{p-2}-y^{p-1}$ (যদি p জোড় পূর্ণসংখ্যা হয়)
অথবা $x^{p-1}-x^{p-2}y+\cdots-xy^{p-2}+y^{p-1}$ (যদি p বিজোড় পূর্ণসংখ্যা হয়)।

টীকা ঃ অমূলদ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশের হরের করণী-নিরসক উৎপাদক দ্বারা ভগ্নাংশটির লব ও হরকে গুণ করিয়া হরকে মূলদ রাশিতে পরিণত করা হয় এবং হরের করণী-নিরসন করা হয়।

2·3. করণীর যোগ, বিয়োগ, গুণন ও ভাগ ঃ

কয়েকটি করণীর যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে সেই করণীগুলিকে সরলতম আকারে লিখিতে হইবে, অর্থাৎ, উহাদের যেগুলিকে একটি মূলদ রাশি ও একটি করণীর গুণফলরূপে লেখা যায়, সেইগুলিকে সেইরূপে পরিবর্তিত করিয়া লিখিতে হইবে। করণীগুলির মধ্যে যেগুলি সদৃশ তাহাদের যোগফলের জন্য উহাদের মূলদ উৎপাদকগুলির সমষ্টির সহিত ঐ অমূলদ উৎপাদকটি গুণ করিতে হইবে। অসদৃশ করণীগুলির যোগফল একটি মাত্র পদ হইবে না, ঐগুলি '+' চিহ্ন দিয়া লিখিতে হইবে। উদাহরণস্বরূপ, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{8}$, $\sqrt{27}$-এর যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে করণীগুলিকে সরলতম আকারে লিখিতে হইবে এবং নির্ণেয় যোগফল হইবে

$$3\sqrt{2}+4\sqrt{2}+3\sqrt{3}=7\sqrt{2}+3\sqrt{3}.$$

বিয়োগের ক্ষেত্রেও একই নিয়ম প্রযোজ্য।

কয়েকটি সমমূলীয় করণীর গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে, উহাদের মূলদ ও অমূলদ উৎপাদকগুলিকে পৃথকভাবে গুণ করিতে হইবে। উদাহরণস্বরূপ, $2\sqrt{3}$ ও $3\sqrt{6}$-এর গুণফল হইল $6\sqrt{18}$ বা $18\sqrt{2}$. করণীগুলি বিভিন্ন ক্রমের হইলে উহাদিগকে সমমূলীয় করণীতে পরিণত করিয়া পূর্বের ন্যায় গুণ করিতে হইবে।

উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{27\times 4}=\sqrt[6]{108}.$

একটি করণীকে অন্য একটি করণী দ্বারা ভাগ করিতে হইলে ভাগটিকে প্রথমে ভগ্নাংশের আকারে লিখিতে হইবে। পরে ঐ ভগ্নাংশের লব ও হরকে উহার হরের করণী-নিরসক উৎপাদক দ্বারা গুণ করিয়া উহার হরকে মূলদ রাশিতে পরিণত করিতে হইবে। উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{2} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

টীকা ঃ দুইটি অসদৃশ দ্বিঘাত করণীর গুণফল মূলদরাশি হইতে পারে না। কারণ, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = x$, একটি মূলদরাশি হইলে,

$\sqrt{a} = \frac{x}{\sqrt{b}} = \frac{x}{b}\sqrt{b}$, অর্থাৎ $\sqrt{a}$ এবং $\sqrt{b}$ সদৃশ।

2·4. দ্বিপদ করণীর ধর্মাবলী ঃ

(i) কোন প্রকৃত দ্বিঘাত করণী কখনও একটি মূলদরাশি ও একটি প্রকৃত দ্বিঘাত করণীর সমষ্টি বা অন্তরের সমান হইতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, মনে কর, $\sqrt{a} = p \pm \sqrt{q}$.

উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া, $a = p^2 + q \pm 2p\sqrt{q}$.

$$\therefore \quad \sqrt{q} = \pm \frac{a - p^2 - q}{2p}.$$

ইহাতে একটি প্রকৃত অমূলদ রাশি ($\sqrt{q}$) একটি মূলদ রাশির সমান হইয়াছে; কিন্তু ইহা অসম্ভব। সুতরাং $\sqrt{a}$, $p \pm \sqrt{q}$-এর সমান নয়।

(ii) যদি $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ হয় এবং উহাতে a ও c দুইটি মূলদরাশি এবং $\sqrt{b}$ ও $\sqrt{d}$ দুইটি প্রকৃত অমূলদ রাশি হয়, তাহা হইলে $a = c$ এবং $b = d$ হইবে; অর্থাৎ উভয়পক্ষের মূলদ রাশিদ্বয় পরস্পর সমান হইবে এবং উভয়পক্ষের অমূলদ রাশিদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে।

যদি a ও c সমান না হয়, তাহা হইলে মনে কর, $a = c + x$, এস্থলে x একটি মূলদ রাশি।

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত হইতে, $c + \sqrt{d} = a + \sqrt{b} = c + x + \sqrt{b}$.

$$\therefore \quad \sqrt{d} = x + \sqrt{b};$$

অর্থাৎ একটি প্রকৃত অমূলদ রাশি, একটি মূলদরাশি ও অপর একটি প্রকৃত অমূলদ রাশির সমষ্টির সমান; কিন্তু পূর্বের ধর্মানুসারে ইহা অসম্ভব।

$$\therefore \quad a = c.$$

সুতরাং $\sqrt{b} = \sqrt{d}$, অর্থাৎ $b = d$.

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $a - \sqrt{b} = c - \sqrt{d}$ হইলে, $a = c$, $b = d$.
$a \pm \sqrt{b} = 0$ হইলে, $a = 0$, $b = 0$.
$a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ হইলে, $a - \sqrt{b} = c - \sqrt{d}$.

টীকা ঃ $\sqrt{b}$ ও $\sqrt{d}$ প্রকৃত অমূলদ না হইলে উপরোক্ত নিয়ম সিদ্ধ হইবে না। উদাহরণস্বরূপ, $2 + \sqrt{9} = 3 + \sqrt{4}$ হইতে বলা যায় না যে, $2 = 3$ এবং $9 = 4$.

দ্রষ্টব্য ঃ এই নিয়মটি প্রয়োগ করিয়া পাওয়া যায় যে,
$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ হইলে $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

কারণ, $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$-এর উভয় পক্ষকে বর্গ করিলে,

$a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$.

$\therefore\ a=x+y$ এবং $\sqrt{b}=2\sqrt{xy}$.

$\therefore\ a-\sqrt{b}=x+y-2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$.

$\therefore\ \sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

বিপরীতভাবে, $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ হইলে, $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

অনুরূপভাবে, $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}=p+\sqrt{q}$ হইলে, $\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=p-\sqrt{q}$

এবং $\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=p-\sqrt{q}$ হইলে, $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}=p+\sqrt{q}$.

সাধারণভাবে, n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে, যদি $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}=l+\sqrt{m}$ হয়, তাহা হইলে $\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}=l-\sqrt{m}$ হইবে।

বিপরীতক্রমে, $\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}=l-\sqrt{m}$ হইলে, $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}=l+\sqrt{m}$ হইবে।

2·5. দ্বিঘাতকরণীর বর্গমূল নির্ণয় ঃ

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{xy}=a+\sqrt{b}$ (মনে কর, $a=x+y$ এবং $b=4xy$).

সুতরাং $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$;

অর্থাৎ দুইটি দ্বিঘাত করণীর সমষ্টির বর্গ একটি মূলদ রাশি ও একটি করণীর সমষ্টি বলিয়া $a+\sqrt{b}$ আকারের একটি দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ আকারের হইবে।

সুতরাং $a+\sqrt{b}$-এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে, মনে কর।

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y} \quad \cdots \quad (1)$$

উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া, $a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$.

উভয়পক্ষ হইতে মূলদরাশি ও অমূলদরাশির পৃথক পৃথক ভাবে সমতা করিয়া,

$$x+y=a \quad \cdots \quad (2)$$

$$2\sqrt{xy}=\sqrt{b},\ \text{অর্থাৎ}\ 4xy=b \quad \cdots \quad (3)$$

এখন, $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=a^2-b$.

$$\therefore\ x-y=\sqrt{a^2-b} \quad \cdots \quad (4)$$

(2) ও (4) হইতে যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে,

$x=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})$ এবং $y=\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})$.

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm[\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})}+\sqrt{\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}]$.

অনুরূপভাবে, $a-\sqrt{b}$-এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে,
$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ধরিয়া নির্ণেয় বর্গমূল পাওয়া যাইবে।

আবার, $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$-এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে, মনে কর,

$$\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

উভয়পক্ষকে বর্গ করিয়া,

$$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}.$$

এখানে ধরা হয়, $x+y+z=a$, $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$, $2\sqrt{yz}=\sqrt{c}$, $2\sqrt{zx}=\sqrt{d}$.

শেষোক্ত তিনটি সমীকরণ হইতে x, y, z-এর মান বা বীজ প্রথম সমীকরণটিকে সিদ্ধ করিলে তবেই নির্ণেয় বর্গমূল হইবে $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$, অন্যথায় নয়।

টীকাঃ দ্বিপদ করণীকে পূর্ণবর্গাকারে লিখিয়াও উহার বর্গমূল নির্ণয় করা যায়। প্রত্যেক রাশির দুইটি করিয়া বর্গমূল হয় বলিয়া (যেমন 4-এর বর্গমূল ± 2, a^2-এর বর্গমূল $\pm a$, ইত্যাদি), বর্গমূলে '$\pm$' চিহ্ন দিতে হয়।

2·6. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{4}$-কে মানের অধঃক্রম অনুসারে লিখ।

এখানে মূলজ্ঞাপক সংখ্যাগুলির অর্থাৎ 2, 3, 4-এর ল. সা. গু. $=12$.

$$\therefore\quad \sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=(3)^{\frac{6}{12}}=\sqrt[12]{3^6}=\sqrt[12]{729};$$

$$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}=(2)^{\frac{4}{12}}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[12]{16};$$

$$\sqrt[4]{4}=4^{\frac{1}{4}}=(4)^{\frac{3}{12}}=\sqrt[12]{4^3}=\sqrt[12]{64}.$$

$\therefore$ মানের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে হইবে $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[3]{2}$.

উদাহরণ 2. $\sqrt{2}=1{\cdot}4142$ ধরিয়া আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত $\dfrac{\sqrt{2}+1}{3-2\sqrt{2}}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\frac{\sqrt{2}+1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=\frac{3\sqrt{2}+3+4+2\sqrt{2}}{3^2-(2\sqrt{2})^2}=\frac{7+5\sqrt{2}}{9-8}$$

$=7+5\sqrt{2}=7+5\times1{\cdot}4142=7+7{\cdot}0710=14{\cdot}071$ (আসন্ন)।

উদাহরণ 3. সরল কর ঃ $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

$$\text{প্রদত্তরাশি}=\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}-\frac{4\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}+\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{3(2\sqrt{3}-\sqrt{6})}{6-3}-\frac{4(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{6-2}+\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3-2}$$

$$=\frac{3(2\sqrt{3}-\sqrt{6})}{3}-\frac{4(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}+\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{1}$$

$$=2\sqrt{3}-\sqrt{6}-3\sqrt{2}+\sqrt{6}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}=0.$$

উদাহরণ 4. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ হইলে, $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$-এর মান কত?

প্রদত্তরাশি $=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$

$$=\frac{1+x+1-x-2\sqrt{1-x^2}}{(1+x)-(1-x)}=\frac{2(1-\sqrt{1-x^2})}{2x}$$

$$=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{1-\sqrt{1-\frac{3}{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=(1-\sqrt{\tfrac{1}{4}})\frac{2}{\sqrt{3}}=(1-\tfrac{1}{2})\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

উদাহরণ 5. $x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ এবং $y=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ হইলে, $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$-এর মান নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

এখানে, $x+y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$$=\frac{3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}{3-1}=\frac{8}{2}=4$$

এবং $xy=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=1.$

$$\therefore\quad \frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{(x+y)^2-3xy}{(x+y)^2-xy}=\frac{4^2-3.1}{4^2-1}=\frac{13}{15}.$$

উদাহরণ 6. $x=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}}$ হইলে,

দেখাও যে, $b^2x^2-2a^2x+b^2=0.$ [W.B.B.H.S.]

প্রদত্ত শর্ত হইতে যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার দ্বারা

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

উভয়পক্ষকে বর্গ করিয়া, $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

পুনরায় যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করিলে,

$$\frac{2(x^2+1)}{4x}=\frac{2a^2}{2b^2}, \text{ অর্থাৎ } \frac{x^2+1}{2x}=\frac{a^2}{b^2}$$

অথবা, $b^2x^2+b^2=2a^2x$.

$\therefore \quad b^2x^2-2a^2x+b^2=0$.

উদাহরণ 7. বর্গমূল নির্ণয় কর :

(i) $37-20\sqrt{3}$; (ii) $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{15}+2\sqrt{10}$.

(i) $37-20\sqrt{3}=37-2\sqrt{300}$.

এখানে এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে যাহাদের যোগফল 37 এবং গুণফল 300. সহজেই দেখা যায় যে, সংখ্যা দুইটি হইবে 25 ও 12.

$\therefore$ প্রদত্তরাশি $=25+12-2\sqrt{300}=5^2+(2\sqrt{3})^2-2.5.2\sqrt{3}$
$=(5-2\sqrt{3})^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(5-2\sqrt{3})$.

বিকল্প পদ্ধতি : মনে কর, $\sqrt{(37-20\sqrt{3})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}, (x>y)$.

উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া, $37-20\sqrt{3}=x+y-2\sqrt{xy}$.

$\therefore \quad x+y=37 \quad \ldots \quad (1)$

$2\sqrt{xy}=20\sqrt{3}$ অর্থাৎ $xy=300 \quad \ldots \quad (2)$

এখন $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=37^2-4.300=169$.

$x-y=13 \quad \ldots \quad (3)$

(1) ও (3) যোগ করিয়া, $2x=50$, অর্থাৎ $x=25$.

(1) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া, $2y=24$, অর্থাৎ $y=12$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{25}-\sqrt{12})=\pm(5-2\sqrt{3})$.

(ii) মনে কর, $\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{15}+2\sqrt{10}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

উভয়পক্ষকে বর্গ করিয়া,

$10+2\sqrt{6}+2\sqrt{15}+2\sqrt{10}=x+y+z+2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})$.

$\therefore\ x+y+z=10,\ 2\sqrt{xy}=2\sqrt{6},\ 2\sqrt{yz}=2\sqrt{15}$

এবং $2\sqrt{zx}=2\sqrt{10}$

অর্থাৎ $x+y+z=10,\ xy=6,\ yz=15, zx=10$.

$\therefore\ xyz=30$.

$\therefore$ শেষ তিনটি সমীকরণ হইতে সমাধান করিলে, $x=2,\ y=3,\ z=5$.

x, y, z-এর এই মানগুলি প্রথম সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

উদাহরণ 8. $10+6\sqrt{3}$-এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

মনে কর, $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}=x+\sqrt{y}$. ... (1)

$\therefore\ \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=x-\sqrt{y}$ ... (2)

(1) ও (2) গুণ করিলে, $x^2-y=\sqrt[3]{100-108}=\sqrt[3]{-8}=-2$

অথবা, $y=x^2+2$ ... (3)

(1)-এর উভয়পক্ষকে ঘন করিয়া, $10+6\sqrt{3}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}$.

উভয়পক্ষের মূলদ রাশিদ্বয়ের সমতা হইতে, $x^3+3xy=10$

অথবা, $x^3+3x(x^2+2)-10=0$ [(3) হইতে]

অথবা, $4x^3+6x-10=0$

অথবা, $2x^3+3x-5=0$

অথবা, $2(x^3-1)+3(x-1)=0$

অথবা, $(x-1)(2x^2+2x+5)=0$.

$\therefore$ হয়, $x-1=0$ অর্থাৎ $x=1$

নতুবা, $2x^2+2x+5=0$; কিন্তু ইহাতে x-এর বাস্তবমান পাওয়া যায় না।

$\therefore\ x=1$.

(3) হইতে, $y=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $=1+\sqrt{3}$.

টীকা : প্রত্যেক রাশির তিনটি করিয়া ঘনমূল হয়। উহাদের একটি বাস্তব, অপর দুইটি কাল্পনিক। এখানে বাস্তব ঘনমূলটিই বিবেচ্য।

প্রশ্নমালা II

1. সম্পূর্ণ করণীরূপে প্রকাশ কর ঃ
(i) $3\sqrt{5}$. (ii) $2\sqrt[3]{6}$. (iii) $a\sqrt[n]{b}$.

2. সরলতম আকারে লিখ ঃ
(i) $\sqrt{32}$. (ii) $\sqrt[3]{384}$. (iii) $\sqrt[5]{896}$.

3. $\frac{2}{3}$-কে দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত করণীরূপে প্রকাশ কর।

4. সমমূলীয় করণীরূপে প্রকাশ কর ঃ
(i) $2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$. (ii) $2\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$

5. (i) $\sqrt{5}$ ও $\sqrt[3]{10}$-এর মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তর ?
(ii) $\sqrt[3]{4}$ ও $\sqrt[4]{9}$-এর মধ্যে কোন্‌টি ক্ষুদ্রতর ?

6. (a) মানের অধঃক্রম অনুসারে সাজাও ঃ
(i) $2\sqrt{2}, 3, \sqrt[3]{10}$. (ii) $\sqrt[3]{9}, \sqrt[4]{36}, \sqrt[6]{80}$.
(b) মানের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে লিখ ঃ
(i) $\sqrt[3]{3}, \sqrt{2}, \sqrt[4]{8}$. (ii) $\sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{8}, \sqrt[5]{12}$.

7. যোগ কর ঃ
(i) $\sqrt{8}, 5\sqrt{2}, 6\sqrt{18}$. (ii) $\sqrt{32}, \sqrt{54}, \sqrt{128}$.

8. প্রথমটি হইতে দ্বিতীয়টি বিয়োগ কর ঃ
(i) $\sqrt{108}, \sqrt{75}$. (ii) $2\sqrt[3]{24}, \sqrt[3]{81}$.

9. গুণ কর ঃ
(i) $3\sqrt{3}+\sqrt{2}$ কে $\sqrt{5}-2\sqrt{2}$ দ্বারা ;
(ii) $\sqrt{a+b}+a-\sqrt{b}$ কে $a+\sqrt{b}$ দ্বারা।

10. প্রথমটিকে দ্বিতীয়টি দ্বারা ভাগ কর ঃ
(i) $3+\sqrt{6}, \sqrt{3}+\sqrt{2}$. (ii) $2\sqrt{5}-1, \sqrt{5}\ \ 1$.

11. বর্গ নির্ণয় কর ঃ
(i) $\sqrt{5}+2\sqrt{3}$. (ii) $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$. (iii) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-3}$.

12. ঘনফল নির্ণয় কর ঃ
(i) $\sqrt{2}+1$. (ii) $2-\sqrt[3]{3}$.

13. করণী-নিরসক উৎপাদক নির্ণয় কর ঃ
(i) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. (ii) $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.
(iii) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$. (iv) $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1$.

14. মূলদ হরবিশিষ্টরূপে প্রকাশ কর ঃ
(i) $\frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$. (ii) $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x}}$. (iii) $\frac{7}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}+1}$.
(iv) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$. (v) $\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1}$.

15. বর্গমূল নির্ণয় কর :

(i) $8+\sqrt{60}$. (ii) $17+12\sqrt{2}$. (iii) $18+6\sqrt{5}$.

(iv) $28-6\sqrt{3}$. (v) $33-4\sqrt{35}$. (vi) $1+\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(vii) $\sqrt{18}-\sqrt{16}$. (viii) $a+b+\sqrt{2ab+b^2}$.

(ix) $x+y+z+2\sqrt{yz+zx}$. (x) $1+x^2+\sqrt{1+x^2+x^4}$.

(xi) $\frac{1}{2}(3x+1)-\sqrt{2x^2-x-6}$. (xii) $\frac{(\sqrt{12}-\sqrt{8})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{5+\sqrt{24}}$.

(xiii) $8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}$. (xiv) $5-\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{6}$.

(xv) $\sqrt{(p-q)(q-r)}+\sqrt{(q-r)(r-p)}+\sqrt{(r-p)(p-q)}$.

16. $\sqrt{2}=1\cdot414$, $\sqrt{3}=1\cdot732$ এবং $\sqrt{5}=2\cdot236$ ধরিয়া আসন্ন দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর :

(i) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$. (ii) $\sqrt{\frac{6+2\sqrt{3}}{33-19\sqrt{3}}}$. (iii) $\frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{\sqrt{2}-\sqrt{(7-3\sqrt{5})}}$.

17. সরল কর :

(i) $\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}+\frac{1}{a-\sqrt{a^2-1}}$ (ii) $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

(iii) $\frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$. (iv) $\frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}$.

(v) $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

(vi) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

(vii) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}+1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$.

(viii) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-1)(3\sqrt{3}-5)(2+\sqrt{2})}$.

(ix) $\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}-\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}$.

(x) $\frac{\sqrt{(4+2\sqrt{3})}-\sqrt{(4-2\sqrt{3})}}{\sqrt{(4+2\sqrt{3})}+\sqrt{(4-2\sqrt{3})}}$.

(xi) $\frac{1}{\sqrt{(11-2\sqrt{30})}}-\frac{3}{\sqrt{(7-2\sqrt{10})}}-\frac{4}{\sqrt{(8+4\sqrt{3})}}$.

(xii) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

[উপরে ও নীচে $\sqrt{2}$ দ্বারা গুণ কর]

18. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ হইলে, $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ এবং $(1+x)^{\frac{3}{2}}+(1-x)^{\frac{3}{2}}$-এর মান কত ?

19. (i) $x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ এবং $y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ হইলে, $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ এবং $3x^2-5xy+3y^2$-এর মান কত ?

(ii) $x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ এবং $xy=1$ হইলে, দেখাও যে, $x^4+x^2y^2+y^4=1155$.

20. $x=7+4\sqrt{3}$ হইলে, $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$-এর মান কত ?

21. (i) প্রমাণ কর যে,

$$\{\sqrt{x^2+2y\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x^2-2y\sqrt{x^2-y^2}}\}^2=4y^2.$$

(ii) $(u+\sqrt{u^2-pq})(v+\sqrt{v^2-qr})(w+\sqrt{w^2-rp})$
$=(u-\sqrt{u^2-pq})(v-\sqrt{v^2-qr})(w-\sqrt{w^2-rp})$ হইলে,
দেখাও যে, প্রত্যেক পক্ষ $\pm pqr$-এর সমান হইবে।

(iii) দেখাও যে, $(12-\sqrt{140})^{-\frac{1}{2}}-(8-\sqrt{60})^{-\frac{1}{2}}=2(10+\sqrt{84})^{-\frac{1}{2}}$

22. যদি $x=\frac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}$ হয়, প্রমাণ কর যে, $bx^2-ax+b=0$.

23. (i) $\sqrt{[a\sqrt{\{a\sqrt{(a\cdots\cdots}}}$ অসীম পর্যন্ত$)\}]$-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) দেখাও যে, $\sqrt{a^3\sqrt{b\sqrt{a^3\sqrt{b\cdots}}}}$ অসীম পর্যন্ত $=\sqrt[5]{a^3b}$.

24. (i) $x=(a+\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}+(a-\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}$ হইলে, $x^3+3bx-2a$-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a}+\sqrt[3]{a+b}=0$ হইলে, দেখাও যে, $(a+b+c)^3=9(a^3+b^3+c^3)$.

25. (*a*) ঘনমূল নির্ণয় কর :

(i) $22+10\sqrt{7}$. (ii) $7-5\sqrt{2}$. (iii) $9\sqrt{3}-11\sqrt{2}$.

(*b*) দেখাও যে, $\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}=\pm(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

তৃতীয় অধ্যায়

জটিল রাশি (Complex Numbers)

3·1. যে-কোন বাস্তব রাশির (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) বর্গ একটি ধনাত্মক রাশি ; অতএব শুধু ধনাত্মক রাশির বর্গমূলই বাস্তব রাশি হইতে পারে। ঋণাত্মক রাশির বর্গমূল বাস্তব রাশি নহে। উদাহরণস্বরূপ, 4-এর বর্গমূল $+2$ অথবা -2, কিন্তু -4 এর বর্গমূল $+2$, -2 বা অপর কোন বাস্তব রাশি নহে। সাধারণভাবে, $\sqrt{x^2}=\pm x$ কিন্তু $\sqrt{-x^2}$-এর মান কোন বাস্তব (real) রাশি নহে। x-এর কোন বাস্তব মান $x^2+1=0$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করিতে পারে না। এইরূপ রাশির সম্পূর্ণ বাস্তবসত্তা নাই বলিয়া এইরূপ রাশিকে অর্থাৎ ঋণাত্মক রাশির বর্গমূলকে **কাল্পনিক রাশি** (imaginary quantity) বলা হয় এবং লিখিবার স্থবিধার জন্য কাল্পনিক রাশি $\sqrt{-1}$-কে 'imaginary' শব্দের আদ্যক্ষর 'i' দ্বারা সূচিত করা হয়। বাস্তব রাশির ন্যায় কাল্পনিক রাশিরও অস্তিত্ব আছে ; কারণ $\sqrt{-a}$ এরূপ একটি রাশি যাহার বর্গ $-a$; $i=\sqrt{-1}$ দ্বারা এমন একটি রাশি বুঝায় যাহার বর্গ -1, অর্থাৎ $i^2=-1$.

সুতরাং $i^3=i^2.i=-i$ এবং $i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$.

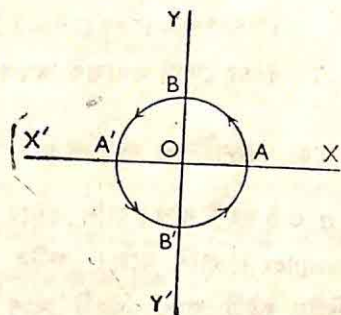
যে-কোন কাল্পনিক রাশিকে একটি বাস্তব রাশি ও i-এর গুণফলরূপে প্রকাশ করা যায়। যেমন, $\sqrt{-4}=\sqrt{4(-1)}=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}=2i$,

$$\sqrt{-x^2}=\sqrt{x^2(-1)}=\sqrt{x^2}\times\sqrt{-1}=xi, \text{ ইত্যাদি।}$$

বীজগণিতে বাস্তবরাশিঘটিত যোগ-বিয়োগাদি যাবতীয় প্রক্রিয়া কাল্পনিক রাশির ক্ষেত্রেও সমভাবে প্রযোজ্য হইবে। যেমন, $6i+4i=10i$, $6i-4i=2i$, $6i\times4i=24i^2=-24$; $6i\div4i=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, ইত্যাদি।

3·2. প্রতীক i-এর জ্যামিতিক অর্থ ঃ

XOX′ এবং YOY′ সরলরেখাদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করিয়াছে। XOX′-কে x-অক্ষ, YOY′-কে y-অক্ষ এবং O-কে মূলবিন্দু বলা হয়। O-কে কেন্দ্র করিয়া 1 একক ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহা x-অক্ষকে A, A′ এবং y-অক্ষকে B, B′ বিন্দুতে ছেদ করিল। সুতরাং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে অবস্থিত A বিন্দু 1 অর্থাৎ i^4 সূচিত করে। আবার, x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে অবস্থিত

A´ বিন্দু -1 অর্থাৎ i^2 সূচিত করে ; অর্থাৎ A বিন্দু ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে বা ধনাত্মক দিকে এক সমকোণ করিয়া পরপর দুই সমকোণ ঘুরিয়া A´ বিন্দুর অবস্থানে আসিলে A´ বিন্দু -1 অর্থাৎ $i \times i$ সূচিত করে। সুতরাং A বিন্দু ধনাত্মক দিকে এক সমকোণ ঘুরিয়া B বিন্দুর অবস্থানে আসিলে B বিন্দু i সূচিত করে। আবার, B বিন্দুর অবস্থান হইতে ধনাত্মক দিকে এক সমকোণ করিয়া পরপর দুই সমকোণ ঘুরিয়া B´ বিন্দুর অবস্থানে আসিলে, অর্থাৎ A বিন্দু ধনাত্মক দিকে তিন সমকোণ ঘুরিয়া B´ বিন্দুর অবস্থানে আসিলে B´ বিন্দু i^3 বা $-i$ সূচিত করে।

$\therefore$ A, A´, B, B´ জ্যামিতিক বিন্দুগুলির দ্বারা যথাক্রমে 1 অথবা i^4, -1 অথবা i^2, i এবং $-i$ অথবা i^3 সূচিত হয়।

1-এর পরিবর্তে যে-কোন বাস্তব সংখ্যা c একক ব্যাসার্ধ লইয়া এবং O-কে কেন্দ্র করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করিলে বৃত্তটি x-অক্ষকে যে-দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের ডানদিকের বিন্দুটি দ্বারা c, বামদিকেরটি দ্বারা $-c$ এবং বৃত্তটি y-অক্ষকে যে-দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের উপরের বিন্দুটি দ্বারা ci, নীচেরটি দ্বারা $-ci$ সূচিত হয়। ইহাদের মধ্যে বাস্তব সংখ্যা c ও $-c$, x-অক্ষের উপর এবং কাল্পনিক সংখ্যা ci ও $-ci$, y-অক্ষের উপর অবস্থিত। c যে-কোন একটি বাস্তব সংখ্যা বলিয়া, সমস্ত বাস্তব সংখ্যাই x-অক্ষের উপর এবং সমস্ত কাল্পনিক সংখ্যাই y-অক্ষের উপর থাকিবে। সেইজন্য x-অক্ষকে **বাস্তব** (real) অক্ষ এবং y-অক্ষকে **কাল্পনিক** (imaginary) অক্ষ বলা হয়।

3·3. i-এর ঘাত :

$i = \sqrt{-1}$ হইলে, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2.i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$.

সাধারণভাবে, n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে,

$$i^{4n} = (i^4)^n = 1, \qquad i^{4n+1} = i^{4n}.i = i,$$

$$i^{4n+2} = i^{4n}.i^2 = -1, \quad i^{4n+3} = i^{4n}.i^3 = -i.$$

$\therefore$ i-এর কোন ধনাত্মক অখণ্ড ঘাতের মান 1, -1, i অথবা $-i$.

আবার, $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i, \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1,$

$$i^{-3} = i^{-1}.i^{-2} = (-i)(-1) = i, \quad i^{-4} = (i^{-2})^2 = (-1)^2 = 1.$$

$\therefore \quad i^{-4n}=(i^{-4})^n=1,\ i^{-(4n+1)}=i^{-4n}.i^{-1}=1(-i)=-i,$

$i^{-(4n+2)}=i^{-4n}.i^{-2}=1.(-1)=-1,$

$i^{-(4n+3)}=i^{-4n}.i^{-3}=1.(i)=i.$

$\therefore$ i-এর কোন ঋণাত্মক অখণ্ড ঘাতের মানও $1,\ -1,\ i$ অথবা $-i$.

3·4. জটিল রাশি ঃ

a ও b দুইটি বাস্তব রাশি হইলে $a+ib$ আকারে প্রকাশিত রাশিকে **জটিল** (complex) রাশি বলে। জটিল রাশির ইহাই সাধারণ আকার। $a+ib$ জটিল রাশিটির দুইটি অংশ, একটি অংশ a বাস্তব এবং অপর অংশটি ib কাল্পনিক। $b=0$ হইলে $a+ib$ জটিল রাশিটি বাস্তব রাশিতে (a-তে) পরিণত হয় এবং $a=0$ হইলে জটিল রাশিটি সম্পূর্ণ কাল্পনিক রাশিতে (ib-তে) পরিণত হয়।

সমান বাস্তব অংশবিশিষ্ট দুইটি জটিল রাশির কাল্পনিক অংশগুলি পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হইলে উহাদের একটিকে অপরটির **অনুবন্ধী** (conjugate) বা **পূরক** জটিল রাশি বলে।

উদাহরণস্বরূপ, $a+ib$ ও $a-ib$ পরস্পর অনুবন্ধী দুইটি জটিল রাশি।

3·5. জটিল রাশির ধর্মাবলী ঃ

(i) **$a+ib=0$ হইলে, $a=0$ এবং $b=0$.**

$a+ib=0$ বলিয়া, $a=-ib$.

বর্গ করিয়া, $a^2=i^2b^2=-b^2$.

$\therefore \quad a^2+b^2=0.$

a ও b বাস্তব বলিয়া উহাদের বর্গ a^2 এবং b^2 উভয়েই ধনাত্মক। সুতরাং উহাদের প্রত্যেকে শূন্য না হইলে উহাদের যোগফল শূন্য হইতে পারে না।

$\therefore \quad a=0, \quad b=0$

(ii) **$a+ib=c+id$ হইলে, $a=c$ এবং $b=d$,**

অর্থাৎ দুইটি জটিল রাশি পরস্পর সমান হইলে উহাদের বাস্তব অংশদ্বয় পরস্পর সমান এবং কাল্পনিক অংশদ্বয় পরস্পর সমান।

$a+ib=c+id$ বলিয়া, $(a-c)=-i(b-d)$.

বর্গ করিয়া, $(a-c)^2=i^2(b-d)^2=-(b-d)^2$.

$\therefore \quad (a-c)^2+(b-d)^2=0.$

এক্ষণে, a, b, c, d বাস্তব বলিয়া, $(a-c)$ ও $(b-d)$ বাস্তব এবং $(a-c)^2$, $(b-d)^2$ উভয়েই ধনাত্মক। সুতরাং উহাদের প্রত্যেকে শূন্য না হইলে উহাদের যোগফল শূন্য হইতে পারে না।

$\therefore$ $a-c=0$ এবং $b-d=0$, অর্থাৎ $a=c$ এবং $b=d$.

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

$a+ib=c+id$ বলিয়া, $(a-c)+i(b-d)=0$.

$\therefore$ 3·5 (i) অনুচ্ছেদ হইতে, $a-c=0$ এবং $b-d=0$ অর্থাৎ $a=c$, $b=d$.

(iii) **দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী জটিলরাশির যোগফল ও গুণফল উভয়েই বাস্তব, কিন্তু উহাদের অন্তরফল সম্পূর্ণ কাল্পনিক।**

মনে কর, $a+ib$ ও $a-ib$ পরস্পর অনুবন্ধী দুইটি প্রদত্ত জটিল রাশি।

$\therefore$ উহাদের যোগফল $=(a+ib)+(a-ib)=2a$, ইহা বাস্তব ;

উহাদের গুণফল $=(a+ib)(a-ib)=a^2-i^2b^2=a^2+b^2$, ইহা বাস্তব ;

এবং উহাদের অন্তরফল $=(a+ib)-(a-ib)=2ib$, ইহা সম্পূর্ণ কাল্পনিক।

(iv) **দুইটি জটিল রাশির যোগফল, অন্তরফল, গুণফল বা ভাগফল একটি জটিল রাশি।**

মনে কর, $a+ib$ ও $c+id$ দুইটি প্রদত্ত জটিল রাশি।

উহাদের যোগফল $=(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$, ইহা একটি জটিল রাশি।

উহাদের অন্তরফল $=(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$, ইহা একটি জটিল রাশি।

উহাদের গুণফল $=(a+ib)(c+id)=ac+ibc+iad+i^2bd$

$=(ac-bd)+i(bc+ad)$, ইহা একটি জটিল রাশি।

উহাদের ভাগফল $=\dfrac{a+ib}{c+id}=\dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\dfrac{ac+ibc-iad-i^2bd}{c^2-i^2d^2}$

$=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$, ইহা একটি জটিল রাশি।

টীকা ঃ অনুরূপভাবে দেখান যায় যে, তিন বা ততোধিক জটিল রাশির বীজগণিতীয় সমষ্টি বা গুণফল একটি জটিল রাশি।

(v) **জটিল রাশির যে-কোন ঘাতই একটি জটিল রাশি।**

মনে কর, $a+ib$ একটি প্রদত্ত জটিল রাশি।

$(a+ib)^2=a^2+i^2b^2+2iab=(a^2-b^2)+i.2ab$, ইহা একটি জটিল রাশি।

$$(a+ib)^3=a^3+3a^2ib+3ai^2b^2+i^3b^3=(a^3-3ab^2)+i(3a^2b-b^3),$$
ইহা একটি জটিল রাশি।

$$(a+ib)^{-1}=\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{a-ib}{a^2-i^2b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2},$$
ইহা একটি জটিল রাশি।

অনুরূপভাবে, দেখান যায় যে, $(a+ib)$-এর অপর যে-কোন ঘাতই একটি জটিল রাশি হইবে।

(vi) জটিল রাশির যে-কোন মূল একটি জটিল রাশি।

মনে কর, $a+ib$ একটি প্রদত্ত জটিল রাশি এবং উহার n-তম মূল হইল x.

$\therefore\ \sqrt[n]{a+ib}=x$, অর্থাৎ $a+ib=x^n$.

এখন, যদি x বাস্তব হয়, তবে x^n বাস্তব হইবে, অর্থাৎ $a+ib$ বাস্তব হইবে। কল্পনানুসারে ইহা ঠিক নহে। সুতরাং x অর্থাৎ $\sqrt[n]{a+ib}$ বাস্তব হইতে পারে না।

$\therefore\ \sqrt[n]{a+ib}$ একটি জটিল রাশি।

3·6. জটিল রাশির বর্গমূল ঃ

জটিল রাশির যে-কোন মূল জটিল রাশি বলিয়া $a+ib$-এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে, মনে কর, $\sqrt{a+ib}=x+iy$; এখানে x ও y উভয়েই বাস্তব।

বর্গ করিয়া, $a+ib=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i.\ 2xy$.

উভয়পক্ষ হইতে বাস্তব অংশদ্বয়ের ও কাল্পনিক অংশদ্বয়ের পৃথক পৃথক ভাবে সমতা করিয়া,

$$x^2-y^2=a \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $i.\ 2xy=ib$, অর্থাৎ $2xy=b \quad \cdots \quad (2)$

এক্ষণে, $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=a^2+b^2$.

$$\therefore\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \quad \cdots \quad (3)$$

(1) ও (3) হইতে যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে,

$x^2=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)$ এবং $y^2=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)$.

$\therefore\ x=\pm\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}}$ এবং $y=\pm\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}$.

(2) হইতে দেখা যায়, b-এর যে-চিহ্ন থাকিবে, xy-এর সেই চিহ্ন থাকিবে।

$\therefore$ b ধনাত্মক হইলে xy ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ x এবং y একই চিহ্নের হইবে এবং b ঋণাত্মক হইলে xy ঋণাত্মক হইবে অর্থাৎ x এবং y পরস্পর বিপরীতচিহ্নের হইবে।

$\therefore$ b ধনাত্মক হইলে, নির্ণেয় বর্গমূল

$$= \pm[\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}}+i\{\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}]$$

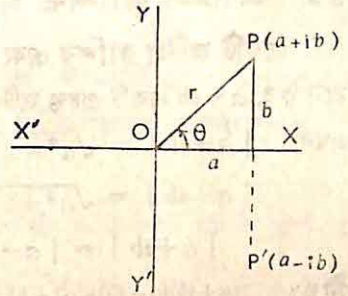
এবং b ঋণাত্মক হইলে, নির্ণেয় বর্গমূল

$$= \pm[\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}}-i\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}].$$

ইহাই বর্গমূল নির্ণয়ের সাধারণ নিয়ম।

টীকা : করণীর ন্যায় জটিল রাশিকে পূর্ণবর্গাকারে লিখিয়াও উহার বর্গমূল নির্ণয় করা যায়।

3·7. জটিল রাশির জ্যামিতিক প্রকাশ :

মনে কর, $a+ib$ জটিল রাশিটিকে জ্যামিতিক বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে। XOX′ এবং YOY′ সরলরেখাদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। XOX′-কে x-অক্ষ বা বাস্তব অক্ষ, YOY′-কে y-অক্ষ বা কাল্পনিক অক্ষ এবং O-কে মূলবিন্দু বা $(0, 0)$ স্থানাঙ্ক জ্ঞাপক বিন্দু বলা হয়।

মনে কর, নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া অক্ষদ্বয়গামী সমতলের উপর অবস্থিত P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (a, b). ঐ P বিন্দুটিই $a+ib$ জটিলরাশিকে প্রকাশ করে।

P′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, -b)$ হইলে P′ বিন্দুটির দ্বারা $a-ib$ জটিলরাশিটি অর্থাৎ $a+ib$-এর অনুবন্ধী জটিল রাশিটি প্রকাশিত হয়।

সুতরাং, দুইটি অনুবন্ধী জটিল রাশির সূচক বিন্দুদ্বয় x-অক্ষ বা বাস্তব অক্ষ সাপেক্ষে পরস্পরের প্রতিবিম্ব (image)।

অক্ষদ্বয়গামী সমতলটিকে Argand তল এবং জটিলরাশির সূচক বিন্দুগুলি সম্বলিত চিত্রটিকে Argand চিত্র বলা হয়।

3·8. মডিউলাস ও অ্যাম্প্লিটিউড :

উপরের চিত্রে $OP=r$ এবং $\angle XOP=\theta$ হইলে, $r=\sqrt{a^2+b^2}$ এবং $\theta=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$.

(a^2+b^2)-এর এই ধনাত্মক বর্গমূলটিকে অর্থাৎ $\sqrt{a^2+b^2}$-কে $a+ib$ জটিল রাশিটির **মডিউলাস** (modulus) বা **ম্যাগনিটিউড** (magnitude) বলে। ইহাকে $|a+ib|$ বা mod $(a+ib)$ লেখা হয়। $\tan^{-1}\frac{b}{a}$ কোণটিকে $a+ib$ জটিল রাশিটির **অ্যাম্প্লিটিউড্** (amplitude), বা **আরগুমেণ্ট** (argument) বলে। ইহাকে amp $(a+ib)$ লেখা হয়। ত্রিকোণমিতিক কোণ বলিয়া ইহার একাধিক মান থাকিতে পারে; ইহার $-\pi$ ও π-এর মধ্যেকার মানটিকে **প্রিন্সিপ্যাল** (principal) মান বলে।

পূর্বের অনুচ্ছেদের চিত্রে, $a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$.

$\therefore\ a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

সুতরাং জটিল রাশিকে $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ আকারেও লেখা যায় এবং এই আকারে প্রকাশিত জটিল রাশিটির মডিউলাস হইল r এবং অ্যাম্প্লিটিউড্ হইল θ.

3·9. জটিল রাশির মডিউলাসের ধর্মাবলী ঃ

(i) একটি জটিল রাশির এবং উহার অনুবন্ধীর মডিউলাস একই।

মনে কর, $a+ib$ একটি প্রদত্ত জটিল রাশি; উহার অনুবন্ধী হইল $a-ib$.

এখন, $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$ এবং

$$|a-ib|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$\therefore\quad |a+ib|=|a-ib|.$$

টীকা ঃ $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$ বলিয়া, দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী জটিল রাশির যে-কোনটির মডিউলাস রাশিদ্বয়ের গুণফলের ধনাত্মক বর্গমূলের সমান।

(ii) দুইটি জটিল রাশির গুণফলের মডিউলাস উহাদের মডিউলাসদ্বয়ের গুণফলের সমান।

মনে কর, $a+ib$ এবং $c+id$ দুইটি প্রদত্ত জটিলরাশি। উহাদের মডিউলাস যথাক্রমে $\sqrt{a^2+b^2}$ এবং $\sqrt{c^2+d^2}$.

জটিলরাশি দুইটির গুণফল $=(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)$.

$\therefore$ জটিল রাশিদ্বয়ের গুণফলের মডিউলাস $=\sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}$

$$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}$$
$$=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}.$$

ইহাই জটিল রাশিদ্বয়ের মডিউলাসদ্বয়ের গুণফল।

(iii) **দুইটি জটিল রাশির ভাগফলের মডিউলাস, উহাদের মডিউলাস-দ্বয়ের ভাগফলের সমান।**

মনে কর, প্রদত্ত জটিল রাশি দুইটি $a+ib$ এবং $c+id$. উহাদের মডিউলাস যথাক্রমে $\sqrt{a^2+b^2}$ এবং $\sqrt{c^2+d^2}$.

জটিল রাশিদ্বয়ের ভাগফল $= \dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$

$$= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

$\therefore$ জটিল রাশিদ্বয়ের ভাগফলের মডিউলাস

$$= \sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

= জটিল রাশিদ্বয়ের মডিউলাসদ্বয়ের ভাগফল।

3·10. দুইটি জটিল রাশির সমষ্টির, অন্তরের, গুণফলের ও ভাগফলের জ্যামিতিক প্রকাশ ঃ

(a) দুইটি জটিল রাশির সমষ্টি

মনে কর, P ও Q বিন্দু দুইটি যথাক্রমে $a+ib$ ও $c+id$ জটিল রাশি দুইটি সূচিত করে। তাহা হইলে লম্ব অক্ষদ্বয় XOX′ ও YOY′-এর সাপেক্ষে P ও Q-এর স্থানাঙ্ক হইল যথাক্রমে (a, b) ও (c, d).

OPRQ সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর।

x-অক্ষের উপর P, Q ও R হইতে যথাক্রমে PL, QM, RN এবং P হইতে RN-এর উপর PS লম্ব টানা হইল। সুতরাং OL $=a$, PL $=b$, OM $=c$, QM $=d$.

OQ ও PR পরস্পর সমান ও সমান্তরাল বলিয়া x-অক্ষের উপর তাহাদের লম্ব অভিক্ষেপ (projection) সমান হইবে। $\therefore$ OM = LN. অনুরূপভাবে, QM = RS.

$\therefore$ ON = OL + LN = OL + OM $= a+c$

এবং RN = RS + SN = QM + PL $= b+d$.

সুতরাং R বিন্দুটি $(a+c)+i(b+d)$ জটিল রাশিটিকে, অর্থাৎ $a+ib$ ও $c+id$ জটিলরাশি দুইটির সমষ্টিকে প্রকাশ করে।

টীকা : মনে কর, $z_1=a+ib$ ও $z_2=c+id$.

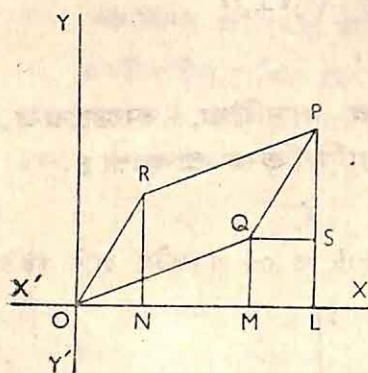
চিত্রে, $|z_1|=OP$, $|z_2|=OQ=PR$ এবং $|z_1+z_2|=OR$.

OPR ত্রিভুজ হইতে, $OR \leqslant OP+PR$ (O,P,R অর্থাৎ O, P, Q সমরেখ হইলে অর্থাৎ $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ হইলে সমান চিহ্ন হইবে)।

$$\therefore \quad |z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|.$$

সাধারণভাবে, $z_1, z_2, \cdots\cdots z_n$, nটি জটিল রাশি হইলে,

$$|z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$$

(b) দুইটি জটিল রাশির অন্তর

মনে কর, P ও Q বিন্দু দুইটি যথাক্রমে $a+ib$ ও $c+id$ জটিল রাশি দুইটি সূচিত করে।

OQPR সামান্তরিকটি অঙ্কন কর। পূর্ব-বর্ণিত কারণে,

$$ON-ML=OL-OM=a-c$$

এবং $RN=PS=PL-SL$

$$=PL-QM=b-d.$$

সুতরাং R বিন্দুটি $a+ib$ ও $c+id$ জটিলরাশি দুইটির বিয়োগফল সূচিত করে।

টীকা : $a+ib=z_1$ এবং $c+id=z_2$ ধরিলে, চিত্রে

$|z_1|=OP$, $|z_2|=OQ$ এবং $|z_1-z_2|=OR=PQ$.

OPQ ত্রিভুজ হইতে, $PQ \leqslant OP \sim OQ$ (O, P, Q সমরেখ হইলে সমান চিহ্ন হইবে)।

$$\therefore \quad |z_1-z_2| \leqslant |z_1| \sim |z_2|.$$

(c) দুইটি জটিল রাশির গুণফল :

XOX′ ও YOY′ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। XOX′, x-অক্ষ বা বাস্তব অক্ষ ; YOY′, y-অক্ষ বা কাল্পনিক অক্ষ ; O-মূলবিন্দু।

মনে কর, কোন নির্দিষ্ট এককে $OP = r_1$, $OQ = r_2$, $\angle XOP = \theta_1$, $\angle XOQ = \theta_2$. θ_1-এর সমান করিয়া এরূপে $\angle QOR$ অঙ্কন কর যেন উহার বাহু $OR = r_1 r_2$ হয়। OX-এর উপর P, Q, R হইতে যথাক্রমে PL, QM ও RN লম্ব টানা হইল।

এক্ষণে, $OL = r_1 \cos \theta_1$

এবং $PL = r_1 \sin \theta_1$.

$\therefore$ P বিন্দু $r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ জটিল রাশিটিকে সূচিত করে।

অনুরূপে, Q বিন্দু $r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ জটিল রাশিটিকে সূচিত করে।

অঙ্কনানুসারে, $OR = r_1 r_2$ এবং $\angle XOR = \theta_1 + \theta_2$.

$\therefore$ $ON = r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$ এবং $RN = r_1 r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$.

$\therefore$ R বিন্দুটি $r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$ জটিল রাশিটিকে সূচিত করে।

এক্ষণে $r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

$= r_1 r_2\{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)\}$

$= r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$.

সুতরাং, R বিন্দুটি, P ও Q বিন্দুদ্বয় দ্বারা সূচিত জটিল রাশিদ্বয়ের গুণফলকে প্রকাশ করিবে।

টীকা : ইহা হইতে সহজেই বলা যায় যে, দুইটি জটিল রাশির গুণফলের মডিউলাস, উহাদের মডিউলাসদ্বয়ের গুণফলের সমান এবং দুইটি জটিল রাশির গুণফলের অ্যাম্প্লিটিউড উহাদের অ্যাম্প্লিটিউডদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

(*d*) দুইটি জটিল রাশির ভাগফল

মনে কর, কোন নির্দিষ্ট এককে $OP = r_1$, $OQ = r_2$, $\angle XOP = \theta_1$, $\angle XOQ = \theta_2$. θ_2-এর সমান করিয়া ঋণাত্মক দিকে এরূপে $\angle POR$ অঙ্কন কর যেন উহার বাহু $OR = r_1/r_2$ হয়।

$\therefore$ $\angle XOR = \theta_1 - \theta_2$.

P, Q ও R হইতে OX-এর উপর যথাক্রমে PL, QM ও RN লম্ব টানা হইল।

পূর্বের আলোচনা অনুযায়ী R বিন্দুটি যে-জটিল রাশিটিকে প্রকাশ করে, সেইটি হইল $\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$. সুতরাং ঐ R বিন্দুটিই P ও Q বিন্দুদ্বয় দ্বারা সূচিত জটিল রাশিদ্বয়ের ভাগফলকে প্রকাশ করে।

টীকা ঃ ইহা হইতে সহজেই বলা যায় যে, দুইটি জটিল রাশির ভাগফলের মডিউলাস, উহাদের মডিউলাসদ্বয়ের ভাগফলের সমান এবং দুইটি জটিলরাশির ভাগফলের অ্যাম্প্লিটিউড্ উহাদের অ্যাম্প্লিটিউডদ্বয়ের অন্তরের সমান।

3·11. 1-এর কাল্পনিক ঘনমূল ঃ

মনে কর, ω, 1-এর একটি কাল্পনিক ঘনমূল। সুতরাং $\omega^3=1$.

$\therefore\ \ \omega^3-1=0$ অর্থাৎ, $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$.

ω কাল্পনিক এবং $\neq 1$ বলিয়া,

$$\omega^2+\omega+1=0.$$

$$\therefore\ \ \omega=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

$\omega=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ ধরিলে, $\omega^2=\frac{1}{4}(1-3-2i\sqrt{3})=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$.

আবার, $\omega=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$ ধরিলে, $\omega^2=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$.

সুতরাং 1-এর কাল্পনিক ঘনমূল হইল ω এবং ω^2.

আবার, $(\omega^2)^2=\omega^4=\omega^3.\omega=\omega\ \ [\because\ \ \omega^3=1]$.

ইহা হইতে বলা যায় যে, 1-এর কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির প্রত্যেকটি অপরটির বর্গ।

পুনরায়, $\omega.\omega^2=\omega^3=1$. সুতরাং 1-এর কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির গুণফল 1 অর্থাৎ একটি কাল্পনিক ঘনমূল অপরটির অন্যোন্যক।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ 1-এর তিনটি ঘনমূলের মধ্যে একটি (1) বাস্তব এবং অপর দুইটি (ω ও ω^2) কাল্পনিক। যে-কোন সংখ্যারই তিনটি ঘনমূল হয়, উহাদের একটি বাস্তব এবং অপর দুইটি কাল্পনিক। উদাহরণস্বরূপ, 8 বা 2^3-এর ঘনমূল হইল $2, 2\omega, 2\omega^2$; a^3-এর ঘনমূল হইল $a, a\omega, a\omega^2$; ইত্যাদি।

1-এর ঘনমূল তিনটির সমষ্টি $=1+\omega+\omega^2=0$.

1-এর ঘনমূলত্রয়ের বর্গের সমষ্টি $=(1)^2+(\omega)^2+(\omega^2)^2=1+\omega^2+\omega^4$

$$=1+\omega^2+\omega^3.\omega=1+\omega^2+\omega=0.$$

টীকা ঃ ω-এর যে-কোন অখণ্ড ঘাতের মান 1 অথবা ω অথবা ω^2 হইবে। কারণ, n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং $n=3m$ (m একটি অখণ্ড সংখ্যা) হইলে,

$$\omega^n=\omega^{3m}=(\omega^3)^m=1^m=1\ ;$$

$n=3m+1$ হইলে, $\omega^n=\omega^{3m+1}=\omega^{3m}.\ \omega=1.\omega=\omega$;

$n=3m+2$ হইলে, $\omega^n=\omega^{3m+2}=\omega^{3m}\omega^2=1\ \omega^2=\omega^2$.

অনুরূপভাবে, n একটি ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলেও $\omega^n=1$, ω অথবা ω^2 হইবে।

3·12. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. $(3+i)(4+3i)(5+7i)$ জটিল রাশিটিকে A$+i$B আকারে প্রকাশ কর এবং উহার মডিউলাস ও অ্যাম্‌প্লিটিউড নির্ণয় কর। [C. P. U.]

$(3+i)(4+3i)(5+7i)=(3+i)(20+15i+28i-21)=(3+i)(-1+43i)$

$=-3-i+129i-43=-46+128i=(-46)+i(128)$.

উহার মডিউলাস$=|-46+128i|=\sqrt{(-46)^2+(128)^2}=10\sqrt{185}$

এবং উহার অ্যাম্‌প্লিটিউড$=\tan^{-1}\dfrac{128}{-46}=\tan^{-1}\left(\dfrac{-64}{23}\right)$.

উদাহরণ 2. $\dfrac{3+5i}{2-3i}$ জটিল রাশিটির অনুবন্ধী নির্ণয় কর।

$$\frac{3+5i}{2-3i}=\frac{(3+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{6+10i+9i-15}{4+9}=\frac{-9}{13}+i\ \frac{19}{13}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুবন্ধী রাশিটি $\dfrac{-9}{13}-\dfrac{19}{13}i$.

উদাহরণ 3. সরল কর ঃ $\dfrac{3+2i}{2-5i}+\dfrac{3-2i}{2+5i}$.

প্রদত্ত রাশি$=\dfrac{(3+2i)(2+5i)+(3-2i)(2-5i)}{2^2-5^2i^2}$

$$=\frac{6+4i+15i-10+6-4i-15i-10}{4+25}=\frac{-8}{29}.$$

উদাহরণ 4. $x=1+2i$ হইলে, $x^3-5x^2+11x-14$-এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত $x=1+2i$ হইতে, $x-1=2i$.

উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া, $x^2-2x+1=-4$

অথবা, $x^2-2x+5=0$.

প্রদত্ত রাশি$=x(x^2-2x+5)-3x^2+6x-14$

$=x(x^2-2x+5)-3(x^2-2x+5)+1$

$=(x^2-2x+5)(x-3)+1=1\quad(\because x^2-2x+5=0)$.

উদাহরণ 5. $\sqrt[3]{x+iy}=a+ib$ হইলে, দেখাও যে, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=4(a^2-b^2)$.

[C. P. U.]

$\sqrt[3]{x+iy}=a+ib$.

$\therefore \quad x+iy=(a+ib)^3=a^3+3a^2bi+3ab^2i^2+b^3i^3$
$=(a^3-3ab^2)+i(3a^2b-b^3)$.

উভয়পক্ষের বাস্তব ও কাল্পনিক অংশের সমতা করিয়া,

$x=a^3-3ab^2$ এবং $y=3a^2b-b^3$.

$$\therefore \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{a^3-3ab^2}{a}+\frac{3a^2b-b^3}{b}=a^2-3b^2+3a^2-b^2=4(a^2-b^2).$$

উদাহরণ 6. $-11-60i$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$-11-60i=-11-2\times 30i$.

এখানে এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে যাহাদের গুণফল $30i$ এবং যাহাদের বর্গের সমষ্টি -11. সংখ্যা দুইটি হইল 5 ও $6i$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=25-36-2.5.6i=5^2+(6i)^2-2.5.6i=(5-6i)^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(5-6i)$.

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে কর, $\sqrt{-11-60i}=x+iy$.

উভয়পক্ষকে বর্গ করিয়া, $-11-60i=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy$.

$\therefore \quad x^2-y^2=-11 \quad \cdots \quad (1)$

$2xy=-60$ অর্থাৎ $xy=-30 \quad \cdots \quad (2)$

এক্ষণে, $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=(-11)^2+4(-30)^2=3721$.

$\therefore \quad x^2+y^2=61 \quad \cdots \quad (3)$

(1) ও (3) যোগ করিয়া, $2x^2=50$, অর্থাৎ $x^2=25$ অর্থাৎ $x=\pm 5$;

(3) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া, $2y^2=72$, অর্থাৎ $y^2=36$ অর্থাৎ $y=\pm 6$.

(2) হইতে দেখা যায়, xy ঋণাত্মক ; সুতরাং x এবং y বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

$\therefore \quad x=\pm 5,\ y=\mp 6. \qquad \therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(5-6i)$.

উদাহরণ 7. a^2+b^2 এবং a^2+ab+b^2-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$a^2+b^2=a^2-(i^2b^2)=a^2-(ib)^2=(a-ib)(a+ib)$.

$a^2+ab+b^2=a^2-(-1)ab+b^2=a^2-(\omega+\omega^2)ab+b^2\omega^3$

[ω, 1-এর কাল্পনিক ঘনমূল বলিয়া, $1+\omega+\omega^2=0$ এবং $\omega^3=1$]

$=a^2-\omega ab-\omega^2ab+b^2\omega^3=a(a-\omega b)-\omega^2b(a-\omega b)$

$=(a-\omega b)(a-\omega^2 b)$.

উদাহরণ 8. 1-এর একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হইলে, দেখাও যে,

$(3+3\omega+5\omega^2)^6=(3+5\omega+3\omega^2)^6=64.$ [W.B.B.H.S.]

ω, 1-এর একটি কাল্পনিক ঘনমূল বলিয়া, $1+\omega+\omega^2=0$ এবং $\omega^3=1.$

$$\therefore\ (3+3\omega+5\omega^2)^6=\{3(1+\omega+\omega^2)+2\omega^2\}^6=(2\omega^2)^6=2^6.\omega^{12}$$
$$=64.(\omega^3)^4=64$$

এবং $(3+5\omega+3\omega^2)^6=\{3(1+\omega+\omega^2)+2\omega\}^6=(2\omega)^6=2^6.\omega^6$
$$=64.(\omega^3)^2=64.$$

$$\therefore\ (3+3\omega+5\omega^2)^6=(3+5\omega+3\omega^2)^6=64.$$

প্রশ্নমালা III

1. $(5\sqrt{-2}-2\sqrt{-3})$ কে $(3\sqrt{-2}+4\sqrt{-3})$ দ্বারা এবং $(\sqrt{3}-i\sqrt{2})$ কে $(2\sqrt{3}-i\sqrt{2})$ দ্বারা গুণ কর।

2. $\dfrac{1}{2-\sqrt{-3}}$ এবং $\dfrac{4+3i}{3+2i}$-কে মূলদ হরবিশিষ্টরূপে প্রকাশ কর।

3. $A+iB$ আকারে প্রকাশ কর:

(i) $(1-2i)(2+3i)(3-4i).$ (ii) $(1-3i)^3.$

(iii) $\dfrac{(2+3i)^2}{2+i}.$ (iv) $\dfrac{a+ib}{a-ib}-\dfrac{a-ib}{a+ib}$

(v) $\dfrac{1}{1-(\cos\theta+i\sin\theta)}.$ (vi) $\dfrac{x+iy+1}{x+iy-1}.$

4. জটিল রাশিগুলির মডিউলাস ও অ্যামপ্লিটিউড্ নির্ণয় কর:

(i) $5+12i.$ (ii) $-1+i\sqrt{3}.$ (iii) $\cos\beta-i\sin\beta.$

(iv) $\dfrac{(1+i)^2}{3-i}.$ (v) $i.$ (vi) $-2i.$

5. জটিল রাশিগুলির অনুবন্ধী নির্ণয় কর:

(i) $\dfrac{2-i}{(1-2i)^2}.$ (ii) $\dfrac{5(5+i)}{(2+i)(1-i)}.$

6. বর্গমূল নির্ণয় কর:

(i) $1+i.$ (ii) $-15-8i.$ (iii) $\pm i.$ (iv) $a^2-1-2ia.$

(v) $1-i(x^4-1).$ (vi) $4ab-2(a^2-b^2)i.$

(vii) $x^2+\dfrac{1}{x^2}+4i\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-6.$ (viii) $x+2+i\sqrt{3x^2-8x-3}.$

7. ঘনমূল নির্ণয় কর :

(i) $198+10i$. (ii) $2-11i$.

8. $120i-119$-এর বর্গমূলের বর্গমূল নির্ণয় কর।

9. সরল কর :

(i) $i+\frac{1}{i}$. (ii) $\frac{1+i}{1-i}$. (iii) $\left(1+i\right)\left(1-\frac{1}{i}\right)$.

(iv) $\frac{(2+i)^3-(2-i)^3}{(2+i)^2-(2-i)^2}$.

10. $x=2+3i$ হইলে, $x^3-4x^2+13x+1$-এর মান কত ?

11. (a) $x=3+4i$ এবং $y=3-4i$ হইলে, x^3+y^3-এর মান নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

(b) $x=2+3i$ এবং $y=2-3i$ হইলে,

$\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$ এবং $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$-এর মান নির্ণয় কর।

12. $1+i\sqrt{3}$-কে $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ আকারে লিখ।

13. $\sqrt{[-3+\sqrt{\{-3+\sqrt{(-3+\cdots\cdots}}}$অসীমপর্যন্ত$)\}]$-এর মান নির্ণয় কর।

14. a, b বাস্তব এবং $a^2+b^2=1$ হইলে, দেখাও যে, x-এর একটি বাস্তব মান $\frac{1-ix}{1+ix}=a-ib$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করিবে। [B. U. Ent.]

15. দেখাও যে, $\frac{(a+ib)^2}{a-ib}-\frac{(a-ib)^2}{a+ib}=\frac{2ib(3a^2-b^2)}{a^2+b^2}$. [C. P. U.]

16. $x+iy=\frac{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$ হইলে, x ও y-এর মান নির্ণয় কর। [C.P.U.]

17. (a) $x+iy=(a+ib)(c+id)$ হইলে, দেখাও যে,
$x^2+y^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$, ($x$, y, a, b, c, d বাস্তব)। [C.P.U.]

(b) $(a+ib)(c+id)=\mathrm{A}+i\mathrm{B}$ হইলে, দেখাও যে, $(a-ib)(c-id)=\mathrm{A}-i\mathrm{B}$.

18. $z=x+iy=\frac{\mathrm{Z}-1}{\mathrm{Z}+1}$ এবং $\mathrm{Z}=\mathrm{X}+i\mathrm{Y}$ হইলে, দেখাও যে,

$x^2+y^2=\frac{(\mathrm{X}-1)^2+\mathrm{Y}^2}{(\mathrm{X}+1)^2+\mathrm{Y}^2}$.

19. $\sqrt[3]{a+ib}=x+iy$ হইলে, দেখাও যে, $\sqrt[3]{a-ib}=x-iy$.

20. দেখাও যে, $(5+12i)^{-\frac{1}{2}}+(5-12i)^{-\frac{1}{2}}=\frac{6}{13}$.

21. প্রমাণ কর :

(i) $\{\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})\}^6=1$. [W. B. B. H. S.]

(ii) $\{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\}^n+\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}^n=2$, যদি n, 3-এর গুণিতক হয়,

$=-1$, যদি n, 3-এর গুণিতক না হয়।

22. $3+2i$, $6+4i$ এবং $9+6i$ জটিল রাশিগুলির জ্যামিতিক প্রকাশ কর। উহাদের মডিউলাস ও অ্যাম্প্লিটিউড নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, উহারা সমরেখ বিন্দু।

23. (-1)-এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

[নির্ণেয় ঘনমূল x হইলে, $x^3=-1$. $\therefore$ $x^3+1=0$, ইত্যাদি]

24. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $1+x^2$. (ii) a^2-ab+b^2.

(iii) $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$. (iv) l^3-m^3.

25. 1-এর একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হইলে, দেখাও যে,

(i) $(1+\omega^4)^4=\omega^2$. (ii) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=4$.

(iii) $(1+\omega-\omega^2)^3=(1-\omega+\omega^2)^3=-8$.

(iv) $(1-\omega+\omega^2)^4+(1+\omega-\omega^2)^4=-16$. [W. B. B. H. S.]

(v) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)=9$.

(vi) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)=1$.

(vii) $\dfrac{x+\omega y+\omega^2 z}{y+\omega z+\omega^2 x}=\omega$. (viii) $(k+k\omega-\omega^2)^3=(k+k\omega^2-\omega)^3$.

(ix) $(x+y\omega+z\omega^2)^2+(x\omega+y\omega^2+z)^2+(x\omega^2+y+z\omega)^2=0$.

[C. P. U.]

(x) $(x+y)^2+(x\omega+y\omega^2)^2+(x\omega^2+y\omega)^2=6xy$. [W.B.B.H.S.]

(xi) $(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)=a^3+b^3+c^3-3abc$.

[W. B. B. H. S.]

(xii) $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16})\cdots\cdots$

$\cdots 2n$ উৎপাদক পর্যন্ত

$=2^{2n}$.

চতুর্থ অধ্যায়

ভেদ (Variation)

4·1. ধ্রুবক ও চল রাশি ঃ

যে-রাশির মান সর্বদা একই থাকে অর্থাৎ অন্য কোন রাশির মানের উপর নির্ভর করে না, সেই রাশিকে **ধ্রুবক** (constant) বলে। উদাহরণস্বরূপ, 1, −2, ·5, ইত্যাদি ধ্রুবক।

যে-রাশির মান পরিবর্তনশীল তাহাকে **চলরাশি** (variable) বলে।

$y=2x+3$ সমীকরণটিতে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য y-এর বিভিন্ন মান হইবে। এখানে x ও y উভয়েই চলরাশি।

4·2. সরল ভেদ বা ভেদ ঃ

দুইটি চল রাশির মধ্যে যদি এরূপ সম্বন্ধ থাকে যে, একটির মান পরিবর্তিত হইলে অপরটির মানও একই অনুপাতে পরিবর্তিত হইবে, তাহা হইলে ঐ পরিবর্তনকে **সরল ভেদ** (direct variation) বা সংক্ষেপে **ভেদ** বলে এবং রাশি দুইটি **সরল ভেদে অবস্থিত** (varies directly) বলা হয়।

দুইটি রাশি সরল ভেদে থাকিলে উহাদের একটির বৃদ্ধিতে অপরটি সমহারে বৃদ্ধি পাইবে এবং উহাদের একটি হ্রাস পাইলে অপরটিও সমহারে হ্রাস পাইবে।

r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পরিধি $2\pi r$, (π একটি ধ্রুবক)। সুতরাং ব্যাসার্ধটিকে দ্বিগুণ করিলে সঙ্গে সঙ্গে বৃত্তটির পরিধিও দ্বিগুণ হইয়া যাইবে এবং ব্যাসার্ধটিকে অর্ধেক করিলে সঙ্গে সঙ্গে বৃত্তটির পরিধিও অর্ধেক হইয়া যাইবে। অতএব, বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসার্ধ সরল ভেদে আছে।

সমবেগে চলমান কোন ব্যক্তি নির্দিষ্ট সময়ে যে-দূরত্ব অতিক্রম করিবে, তাহার দ্বিগুণ সময়ে দ্বিগুণ দূরত্ব অতিক্রম করিবে এবং অর্ধেক সময়ে অর্ধেক দূরত্ব অতিক্রম করিবে। সুতরাং, সময়ের সহিত দূরত্ব সরলভেদে অবস্থিত। এস্থলে ব্যক্তির বেগ ধ্রুবক।

'A এবং B সরল ভেদে আছে' ইহাকে '$A \propto B$' লিখিয়া প্রকাশ করা হয়।

সংজ্ঞানুসারে, A ও B সরলভেদে অবস্থিত থাকিলে $A=kB$ হইবে। এখানে k একটি ধ্রুবক। এই ধ্রুবক k-কে ভেদের ধ্রুবক বলে। ইহা A ও B নিরপেক্ষ ধ্রুবক। $\frac{A}{B}=k=$ ধ্রুবক বলিয়া, সরলভেদে অবস্থিত দুইটি রাশির ভাগফল ধ্রুবক। সরলভেদে অবস্থিত চলমান রাশি দুইটির একজোড়া অনুরূপমান (corresponding

values) জানা থাকিলে ভেদের ধ্রুবকটি নির্ণয় করা যায়। A ও B চলমান রাশি দুইটি সরলভেদে থাকিলে এবং $A=a$ যখন $B=b$ হইলে (অর্থাৎ A-এর মান a-তে পরিবর্তিত হইলে যদি B-এর মান b তে পরিবর্তিত হয়), ভেদের ধ্রুবক $k=\frac{a}{b}$.

A-এর মান a_1 হইতে a_2-তে পরিবর্তিত হইলে যদি B-এর মান b_1 হইতে b_2-তে পরিবর্তিত হয়, তাহা হইলে $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

বিপরীতক্রমে, $A=kB$ (k একটি ধ্রুবক) হইলে, $A\propto B$ অর্থাৎ দুইটি চলরাশির ভাগফল ধ্রুবক হইলে বলা যায় যে, রাশি দুইটি সরলভেদে অবস্থিত।

টীকা : A এবং B সরলভেদে থাকিলে $A=kB$. (k একটি ধ্রুবক)। ইহার লেখটি মূলবিন্দুগামী একটি সরলরেখা। সুতরাং দুইটি চলরাশি সরলভেদে থাকিলে উহাদের অনুরূপ মানগুলিদ্বারা সূচিত বিন্দুগুলি (0, 0) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত হইবে।

4·3. ব্যস্ত ভেদ বা বিপরীত ভেদ ঃ

দুইটি চলরাশির মধ্যে যদি এরূপ সম্বন্ধ থাকে যে, একটির মান পরিবর্তিত হইলে অপরটির **অন্যোন্যকের** (reciprocal) মানও একই অনুপাতে পরিবর্তিত হইবে, তাহা হইলে ঐ পরিবর্তনকে **ব্যস্ত ভেদ** বা **বিপরীত ভেদ** (inverse variation) বলে এবং রাশি দুইটি **ব্যস্তভেদে অবস্থিত** (varies inversely) বলা হয়। কোন রাশির অন্যোন্যক বলিলে (1 ÷ সেই রাশি) বুঝায় অর্থাৎ x-এর অন্যোন্যক হইল $\frac{1}{x}$.

দুইটি রাশি ব্যস্তভেদে থাকিলে উহাদের একটির বৃদ্ধিতে অপরটি সমহারে হ্রাস পাইবে এবং উহাদের একটি হ্রাস পাইলে অপরটি সমহারে বৃদ্ধি পাইবে। কোন নির্দিষ্ট বেগে কোন নির্দিষ্ট দূরত্ব যাইতে যে-সময় লাগে, তাহার দ্বিগুণ বেগে যাইলে অর্ধেক সময় লাগিবে এবং অর্ধেক বেগে যাইলে দ্বিগুণ সময় লাগিবে। সুতরাং বেগের সহিত সময় ব্যস্ত ভেদে অবস্থিত।

'A ও B ব্যস্তভেদে আছে' ইহাকে '$A\propto\frac{1}{B}$' লিখিয়া প্রকাশ করা হয় ; অর্থাৎ,

$A=k.\ \frac{1}{B}$, এখানে k একটি ধ্রুবক।

$\therefore\quad AB=k=$ ধ্রুবক।

সুতরাং ব্যস্তভেদে অবস্থিত দুইটি রাশির গুণফল ধ্রুবক।

বিপরীতক্রমে বলা যায় যে, দুইটি রাশির গুণফল ধ্রুবক হইলে উহাদের একটি অপরটির সহিত ব্যস্তভেদে অবস্থিত।

ব্যস্তভেদে A-এর মান a_1 হইতে a_2-তে পরিবর্তিত হইলে যদি B-এর মান b_1 হইতে b_2-তে পরিবর্তিত হয়, তাহা হইলে $A \propto \frac{1}{B}$ হইতে লেখা যায়, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}$.

টীকা : A এবং B ব্যস্তভেদে থাকিলে $AB = k$, (k একটি ধ্রুবক)। ইহার লেখ একটি সমপরাবৃত্ত (rectangular hyperbola). সুতরাং দুইটি চলরাশি ব্যস্তভেদে থাকিলে উহাদের অনুরূপ মানগুলি দ্বারা সূচিত বিন্দুগুলি একটি সমপরাবৃত্তের উপর থাকিবে।

4·4. যৌগিক ভেদ ঃ

যদি একটি চলরাশি এবং অপর কতিপয় চলরাশির গুণফল সরলভেদে অবস্থিত হয়, তাহা হইলে প্রথম রাশিটিকে অপর রাশিগুলির সহিত **যৌগিকভেদে** (joint variation) অবস্থিত বলা হয়।

A এবং BC সরলভেদে থাকিলে অর্থাৎ $A \propto BC$ বা $A = kBC$ (k ধ্রুবক) হইলে, A-কে B ও C-এর সহিত যৌগিকভেদে অবস্থিত বলা হয়।

বিপরীতক্রমে, A রাশিটি B, C ও D-এর সহিত যৌগিকভেদে থাকিলে,

$A \propto BCD$ অর্থাৎ $A = kBCD$, k ধ্রুবক।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা ; $\frac{1}{2}$ একটি ধ্রুবক বলিয়া ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল এবং উহার (ভূমি $\times$ উচ্চতা) সরলভেদে অবস্থিত ;

অর্থাৎ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উহার ভূমি ও উচ্চতার সহিত যৌগিকভেদে অবস্থিত।

কোন মূলধনের সুদ উহার মূলধন, সুদের হার ও সময়ের সহিত যৌগিকভেদে অবস্থিত।

একটি চলরাশি দ্বিতীয় একটি চলরাশির সহিত এবং তৃতীয় একটি চলরাশির অন্যোন্যকের সহিত যৌগিকভেদে থাকিলে বুঝিতে হইবে যে, প্রথম রাশিটি দ্বিতীয়টির সহিত সরলভেদে এবং তৃতীয়টির সহিত ব্যস্তভেদে অবস্থিত।

A রাশিটি B ও $\frac{1}{C}$-এর সহিত যৌগিকভেদে থাকিলে $A \propto B$ এবং $A \propto \frac{1}{C}$.

যৌগিক ভেদ সম্বন্ধীয় উপপাদ্য

যদি $A \propto B$ যখন C অপরিবর্তিত থাকে এবং $A \propto C$ যখন B অপরিবর্তিত থাকে, তাহা হইলে, $A \propto BC$ যখন B এবং C উভয়ই পরিবর্তিত হয়।

প্রমাণ ঃ মনে কর, A, B ও C-এর তিনটি অনুরূপ মান যথাক্রমে a_1, b_1 ও c_1. C-এর মান c_1-এ অপরিবর্তিত থাকিয়া মনে কর, A-এর মান a_1 হইতে a

হইল, যখন B-এর মান b_1 হইতে b_2 হইল। এক্ষণে, A∝B যখন C অপরিবর্তিত থাকে।

$\therefore \quad \frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b_2} \quad \cdots \quad (1)$

এখন, মনে কর, B-এর মান b_2-তে অপরিবর্তিত থাকিয়া A-এর মান a হইতে a_2 হইল যখন C-এর মান c_1 হইতে c_2 হইল। এক্ষণে, A∝C যখন B অপরিবর্তিত থাকে।

$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{c_1}{c_2} \quad \cdots \quad (2)$

(1) এবং (2) গুণ করিলে, $\frac{a_1}{a}\times\frac{a}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\times\frac{c_1}{c_2}$

অথবা, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1c_1}{b_2c_2} \quad \cdots \quad (3)$

(a_1, b_1, c_1) এবং (a_2, b_2, c_2), A, B ও C-এর দুই দল (set) অনুরূপ মান বলিয়া (3) হইতে বলা যায় যে, A∝BC, যখন B এবং C উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

বিকল্প পদ্ধতি :

যেহেতু A∝B, যখন C ধ্রুবক ; ∴ A$=k$B, যেখানে k একটি A ও B নিরপেক্ষ ধ্রুবক।

আবার, যেহেতু A∝C, যখন B ধ্রুবক ;

∴ kB∝C, যখন B ধ্রুবক অর্থাৎ k∝C যখন B ধ্রুবক।

∴ $k=m$C, যেখানে m একটি k ও C নিরপেক্ষ ধ্রুবক।

এক্ষণে, k একটি A ও B নিরপেক্ষ ধ্রুবক বলিয়া m একটি A, B ও C নিরপেক্ষ ধ্রুবক।

∴ A$=k$B$=m$C.B$=m$BC, যেখানে m একটি A, B ও C নিরপেক্ষ ধ্রুবক।

∴ A∝BC, যখন B ও C উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

অনুসিদ্ধান্ত : যদি A∝B যখন C ও D অপরিবর্তিত থাকে, A∝C যখন B ও D অপরিবর্তিত থাকে, এবং A∝D যখন B ও C অপরিবর্তিত থাকে, তাহা হইলে A∝BCD যখন B, C ও D পরিবর্তিত হয়।

সাধারণভাবে, A যদি B, C, D, E, প্রভৃতি রাশিগুলির প্রত্যেকটির সহিত সরল-ভেদে থাকে, যখন সেই রাশিটি ছাড়া অপর রাশিগুলি অপরিবর্তিত থাকে, তাহা হইলে A∝BCDE···, যখন সব রাশিগুলিই পরিবর্তিত হয়।

টীকা : যদি A∝B যখন C অপরিবর্তিত থাকে এবং A∝$\frac{1}{\text{C}}$ যখন B অপরিবর্তিত থাকে, তাহা হইলে A∝$\frac{\text{B}}{\text{C}}$ যখন B ও C উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

কারণ, C অপরিবর্তিত থাকিলে $\frac{1}{\text{C}}$ অপরিবর্তিত থাকে এবং C পরিবর্তিত হইলে $\frac{1}{\text{C}}$ও পরিবর্তিত হয়।

4·5. ভেদের কতিপয় ধর্মাবলী ঃ

(i) $A \propto B$ হইলে, $B \propto A$.

$A \propto B$ হইলে, $A = kB$ (k একটি ধ্রুবক)।

$\therefore$ $B = \frac{1}{k} A$ অর্থাৎ $B \propto A$ ($\because$ $\frac{1}{k}$ একটি ধ্রুবক)।

(ii) $A \propto B$ হইলে, $A^n \propto B^n$.

$A \propto B$ হইলে, $A = kB$ (k একটি ধ্রুবক)।

$\therefore$ $A^n = k^n B^n$ অর্থাৎ $A^n \propto B^n$ ($\because$ k^n একটি ধ্রুবক)।

(iii) $A \propto B$ এবং $B \propto C$ হইলে, $A \propto C$.

$A \propto B$ হইলে, $A = k_1 B$ (k_1 একটি ধ্রুবক)

এবং $B \propto C$ হইলে, $B = k_2 C$ (k_2 একটি ধ্রুবক)।

$\therefore$ $A = k_1 B = k_1 k_2 C$ অর্থাৎ $A \propto C$ ($\because$ $k_1 k_2$ একটি ধ্রুবক)।

(iv) $A \propto C$ এবং $B \propto C$ হইলে, $(A \pm B) \propto C$ এবং $AB \propto C^2$.

$A \propto C$ হইলে, $A = k_1 C$ (k_1 একটি ধ্রুবক)

এবং $B \propto C$ হইলে, $B = k_2 C$ (k_2 একটি ধ্রুবক)।

$\therefore$ $(A \pm B) = (k_1 \pm k_2)\, C$ অর্থাৎ $(A \pm B) \propto C$ ($\because$ $k_1 \pm k_2$ ধ্রুবক)

এবং $AB = k_1 k_2 C^2$ অর্থাৎ $AB \propto C^2$ ($\because$ $k_1 k_2$ ধ্রুবক)।

(v) $A \propto B$ এবং $C \propto D$ হইলে, $AC \propto BD$ এবং $\frac{A}{C} \propto \frac{B}{D}$.

$A \propto B$ হইলে, $A = k_1 B$ (k_1 একটি ধ্রুবক)

এবং $C \propto D$ হইলে, $C = k_2 D$ (k_2 একটি ধ্রুবক)।

$\therefore$ $AC = k_1 k_2 BD$ অর্থাৎ $AC \propto BD$ ($\because$ $k_1 k_2$ একটি ধ্রুবক)

এবং $\frac{A}{C} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{B}{D}$ অর্থাৎ $\frac{A}{C} \propto \frac{B}{D}$ ($\because$ $\frac{k_1}{k_2}$ একটি ধ্রুবক)।

(vi) $A \propto BC$ হইলে, $B \propto \frac{A}{C}$ এবং $C \propto \frac{A}{B}$.

$A \propto BC$ হইলে, $A = kBC$ (k একটি ধ্রুবক)।

$\therefore$ $B = \frac{1}{k} \cdot \frac{A}{C}$ এবং $C = \frac{1}{k} \cdot \frac{A}{B}$

অর্থাৎ $B \propto \frac{A}{C}$ এবং $C \propto \frac{A}{B}$ ($\because$ $\frac{1}{k}$ একটি ধ্রুবক)।

4·6. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. যদি x ও y^2 সরল ভেদে অবস্থিত থাকে এবং $x=8$ হইলে $y=4$ হয়, তবে $x=32$ হইলে y-এর মান নির্ণয় কর। [W. B. B. H. S.]

$x \propto y^2$. $\therefore$ $x=ky^2$ (k একটি ধ্রুবক)।

আবার, $x=8$ হইলে, $y=4$. $\therefore$ $8=k.4^2=16k$, অর্থাৎ $k=\frac{1}{2}$.

$$\therefore \quad x=\tfrac{1}{2}y^2. \quad \cdots \quad (1)$$

(1)-এ, $x=32$ বসাইলে, $32=\frac{1}{2}y^2$.

$$\therefore \quad y^2=64 \text{ অর্থাৎ } y=\pm 8.$$

উদাহরণ 2. $x+y \propto x-y$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $x^2+y^2 \propto xy$

(ii) $ax+by \propto px+qy$, (a, b, p, q ধ্রুবক)।

$x+y \propto x-y$ হইলে, $x+y=k(x-y)$, k একটি ধ্রুবক।

$$\therefore \quad \frac{x+y}{x-y}=\frac{k}{1}.$$

যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে, $\frac{x}{y}=\frac{k+1}{k-1}=k'$ (ধ্রুবক), মনে কর।

$$\therefore \quad x=k'y.$$

(i) এখন, $\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{k'^2y^2+y^2}{k'y.y}=\frac{k'^2+1}{k'}=$ ধ্রুবক।

$$\therefore \quad x^2+y^2 \propto xy.$$

(ii) $\frac{ax+by}{px+qy}=\frac{ak'y+by}{pk'y+qy}=\frac{ak'+b}{pk'+q}=$ ধ্রুবক।

$$\therefore \quad ax+by \propto px+qy.$$

উদাহরণ 3. যদি $x+y$ ও z সরল ভেদে থাকে, যখন y পরিবর্তিত হয় না এবং $x+z$ ও y সরলভেদে থাকে, যখন z পরিবর্তিত হয় না, তবে দেখাও যে, $x+y+z$ ও yz সরলভেদে থাকিবে, যখন y ও z উভয়ই পরিবর্তিত হইবে। [B. U. Ent.]

$\because$ $x+y \propto z$, যখন y ধ্রুবক, $\therefore$ $x+y=mz$, যেখানে y ও m ধ্রুবক।

$\therefore$ $x+y+z=mz+z=(m+1)z$.

$\therefore$ $x+y+z \propto z$, যখন y ধ্রুবক $\cdots$ (1)

আবার, $x+z \propto y$, যখন z ধ্রুবক ; $\therefore$ $x+z=ny$, যেখানে z ও n ধ্রুবক।

$\therefore$ $x+y+z=ny+y=(n+1)y$.

$\therefore \quad x+y+z \propto y$, যখন z ধ্রুবক $\quad \cdots \quad (2)$

অতএব (1) ও (2) হইতে, $x+y+z \propto yz$, যখন y ও z উভয়ই পরিবর্তিত হয়।

উদাহরণ 4. $x \propto \frac{1}{y}$ হইলে, দেখাও যে, $x+y$-এর মান ক্ষুদ্রতম, যখন $x=y$.

$x \propto \frac{1}{y}$ হইলে, $x=\frac{k}{y}$, যেখানে k ধ্রুবক ; $\therefore \quad xy=k$.

এখন, $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=(x-y)^2+4k$.

এখন, $4k$ একটি ধ্রুবক এবং $(x-y)^2$-এর ক্ষুদ্রতম মান 0, কারণ বর্গরাশি বলিয়া উহার কোন ঋণাত্মক মান হইতে পারে না।

$\therefore \quad (x+y)^2$-এর মান ক্ষুদ্রতম হইবে যদি $(x-y)^2=0$ হয়।

$\therefore \quad (x+y)$-এর মান ক্ষুদ্রতম হইবে যদি $x-y=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $x=y$ হয়।

উদাহরণ 5. যদি P এবং দুইটি রাশির সমষ্টি সরল ভেদে থাকে এবং রাশিদ্বয়ের একটি ও x সরলভেদে এবং অপরটি ও x ব্যস্তভেদে থাকে এবং যদি $x=4$ হইলে $P=6$ এবং $x=3$ হইলে $P=3\frac{1}{3}$ হয়, তবে $x=2$ হইলে P-এর মান নির্ণয় কর।

[C. P. U.]

মনে কর, $P \propto Q+R$ এবং $Q \propto x$, $R \propto \frac{1}{x}$.

$\therefore \quad Q=k_1x, R=\frac{k_2}{x}$ এবং $P=k(Q+R)$, যেখানে k_1, k_2 ও k ধ্রুবক।

$\therefore \quad P=k\left(k_1x+\frac{k_2}{x}\right)=kk_1x+\frac{kk_2}{x}=mx+\frac{n}{x} \quad \cdots \quad (1)$

যেখানে $m=kk_1$ ও $n=kk_2$ উভয়েই ধ্রুবক।

$x=4$ হইলে $P=6$. $\quad \therefore$ (1) হইতে, $6=4m+\frac{n}{4} \quad \cdots \quad (2)$

$x=3$ হইলে $P=3\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$. $\therefore$ (1) হইতে, $\frac{10}{3}=3m+\frac{n}{3} \quad \cdots \quad (3)$

(2) ও (3) হইতে, সমাধান করিলে, $m=2$ এবং $n=-8$.

$\therefore$ (1) হইতে, $P=2x-\frac{8}{x}$.

ইহাতে $x=2$ বসাইলে, $P=2.2-\frac{8}{2}=4-4=0$.

উদাহরণ 6. বৃত্তের ক্ষেত্রফল উহার ব্যাসার্ধের বর্গের সহিত সরল ভেদে থাকে ; 3·5 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল 38·5 বর্গ সে.মি. হইলে $4\frac{2}{3}$ সে.মি. ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

মনে কর, R ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=$ A.

$\therefore$ $A \propto R^2$ অর্থাৎ $A = kR^2$, যেখানে k একটি ধ্রুবক।

R $=3·5$ সে. মি. হইলে A $=38·5$ ব. সে. মি. ;

$\therefore$ $38·5 = k.(3·5)^2$ অর্থাৎ $k=\frac{22}{7}$. $\therefore$ $A=\frac{22}{7}R^2$. ... (1)

(1)-এ, R $=4\frac{2}{3}$ সে. মি. $=\frac{14}{3}$ সে. মি. বসাইলে,

$A=\frac{22}{7}(\frac{14}{3})^2$ ব. সে. মি. $=68\frac{4}{9}$ বর্গ সে. মি.

উদাহরণ 7. স্থিতাবস্থা হইতে কোন বস্তু কর্তৃক অতিক্রান্ত পথ উহার গমন কালের বর্গের সমানুপাতী। বস্তুটির 72 ফুট পড়িতে 3 সেকেণ্ড সময় লাগিলে 8 সেকেণ্ডে উহা কতদূর পড়িবে ? [W.B.B.H.S.]

মনে কর, t সময়ে অতিক্রান্ত পথ $=d$.

$\therefore$ $d \propto t^2$ অর্থাৎ $d=kt^2$, এখানে k একটি ধ্রুবক।

$t=3$ সে. হইলে $d=72$ ফুট ; $\therefore$ $72=k.\ 3^2$ অর্থাৎ $k=8$.

$\therefore$ $d=8t^2$ ... (1)

(1)-এ, $t=8$ সে. বসাইলে $d=8.8^2$ ফুট $=512$ ফুট।

উদাহরণ 8. যদি 5 জন লোক 8 দিনে 10 হেক্টর জমি চাষ করিতে পারে, তবে 20 জন লোক কত সময়ে 30 হেক্টর জমি চাষ করিবে তাহা ভেদের প্রণালীতে নির্ণয় কর।

লোকসংখ্যাকে x, দিনসংখ্যাকে y এবং হেক্টর সংখ্যাকে z দ্বারা সূচিত করিলে সর্তানুসারে. $x \propto \frac{1}{y}$ যখন z একটি ধ্রুবক এবং $x \propto z$, যখন y একটি ধ্রুবক।

$\therefore$ যৌগিক ভেদের উপপাদ্য অনুসারে, $x \propto \frac{z}{y}$, যখন y ও z উভয়ই পরিবর্তিত হয়।

$\therefore$ $x=k\frac{z}{y}$, যেখানে k একটি ধ্রুবক।

$x=5$, $y=8$ হইলে $z=10$. $\therefore$ $5=k.\frac{10}{8}$ অর্থাৎ $k=4$.

$\therefore$ $x=\frac{4z}{y}$. ... (1)

(1)-এ $x=20$, $z=30$ বসাইলে, $20=\frac{4.30}{y}$ অর্থাৎ $y=6$.

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $=6$ দিন।

প্রশ্নমালা IV

1. যদি P ও Q ব্যস্তভেদে অবস্থিত থাকে এবং Q = 3 হইলে P = 7 হয়, তবে Q = $2\frac{1}{3}$ হইলে P-এর মান নির্ণয় কর।

2. A যদি B ও C-এর সহিত সম্মিলিত ভেদে থাকে এবং B = $\frac{3}{8}$ ও C = $\frac{10}{27}$ হইলে A = 2 হয়, তবে A, B ও C-এর মধ্যে সম্বন্ধটি নির্ণয় কর।

3. (i) $a^2 \propto bc$, $b^2 \propto ca$ এবং $c^2 \propto ab$ হইলে, ভেদ ধ্রুবকত্রয়ের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

(ii) $x \propto y+z$, $y \propto z+x$ এবং $z \propto x+y$ হইলে, ভেদ ধ্রুবক তিনটির মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

4. (*a*) $x+y \propto x-y$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $x \propto y$. (ii) $x^2+y^2 \propto x^2-y^2$. (iii) $x^3+y^3 \propto x^3-y^3$.

(*b*) $ax+by \propto cx+dy$ হইলে, দেখাও যে, $x \propto y$.

(*c*) $x^2+y^2 \propto x^2-y^2$ হইলে, দেখাও যে, $x+y \propto x-y$.

5. $a \propto b$ এবং $b \propto c$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $a^2+b^2+c^2 \propto ab+bc+ca$. (ii) $a^3+b^3+c^3 \propto 3abc$

(iii) $a^n+b^n+c^n \propto ab^{n-1}+bc^{n-1}+ca^{n-1}$.

6. (i) $a \propto \frac{c}{b^2}$ এবং $c^2 \propto \frac{b}{a}$ হইলে, দেখাও যে, $a \propto \frac{1}{b} \propto \frac{1}{c}$.

(ii) $a \propto b+c$ যখন $b-c$ অপরিবর্তিত থাকে এবং $a \propto b-c$ যখন $b+c$ অপরিবর্তিত থাকে। দেখাও যে, $a \propto b^2-c^2$ যখন b ও c উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

(iii) $x+y \propto z$ এবং $y+z \propto x$ হইলে, দেখাও যে, $z+x \propto y$.

7. (*a*) $\frac{x}{y} \propto x+y$ এবং $\frac{y}{x} \propto x-y$ হইলে, দেখাও যে, x^2-y^2 অপরিবর্তনশীল।

[H. S. 1978]

(*b*) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y} \propto \frac{1}{x-y}$ হইলে, দেখাও যে, $\frac{x^2+y^2}{xy}$ ধ্রুবক।

8. $x \propto y$ এবং $y \propto z$ হইলে এবং (a, b, c) ও $(a', b', c',)$ x, y, z-এর দুইদল মান হইলে, দেখাও যে, $\frac{a^2+b^2+c^2}{aa'+bb'+cc'} = \frac{aa'+bb'+cc'}{a'^2+b'^2+c'^2}$.

9. একটি চলরাশি y দুইটি রাশির সমষ্টির সমান। রাশিদ্বয়ের একটি $3x$-এর সহিত সরলভেদে এবং অপরটি x^2-এর সহিত ব্যস্তভেদে অবস্থিত। যদি $x = 1$

হইলে $y=20$ এবং $x=2$ হইলে $y=26$ হয়, তবে $x=4$ হইলে y-এর মান কত হইবে নির্ণয় কর।

10. বৃত্তের ক্ষেত্রফল উহার ব্যাসার্ধের বর্গের সহিত সরলভেদে থাকে। 7 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল 154 বর্গ সে. মি. হইলে 10·5 সে. মি. ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

11. কোন হোটেলের খরচের কিছু অংশ অপরিবর্তনশীল এবং কিছু অংশ বোর্ডারের সংখ্যার সহিত সরলভেদে থাকে। যখন 25 জন বোর্ডার থাকে তখন জনপ্রতি 70 টাকা এবং যখন 50 জন বোর্ডার থাকে তখন জনপ্রতি 60 টাকা খরচ পড়ে। যখন বোর্ডারের সংখ্যা 100 জন তখন জনপ্রতি কত খরচ লাগিবে?

12. একপ্রকার মূল্যবান পাথরের মূল্য উহার ওজনের বর্গের সহিত সরলভেদে আছে। ঐ জাতীয় একটি পাথর 4টি অংশে বিভক্ত হইল এবং এই অংশসমূহের ওজনের অনুপাত হইল যথাক্রমে $1:2:3:4$. যদি ইহার ফলে 70,000 টাকা ক্ষতি হয়, তবে আসল পাথরটির মূল্য নির্ণয় কর।

13. গোলকের ঘনফল উহার ব্যাসার্ধের ঘনের সহিত সরলভেদে থাকে। 3, 4 এবং 5 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট তিনটি নিরেট লৌহ গোলক গলাইয়া একটি নিরেট গোলকে পরিণত করা হইল। নূতন গোলকটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

[B. U. Ent.]

14. x-ফুট গভীর নলকূপ তৈয়ার করিবার খরচের এক অংশ x-এর সহিত এবং অপর অংশটি x^2-এর সহিত সরল ভেদ সম্বন্ধে অবস্থিত। 100 ফুট এবং 200 ফুট গভীর নলকূপের জন্য যথাক্রমে 500 টাকা এবং 1,200 টাকা খরচ হইলে 250 ফুট গভীর নলকূপের জন্য কত খরচ হইবে? [C.P. U.]

15. স্থিতাবস্থা হইতে কোন বস্তু কর্তৃক অতিক্রান্ত পথ উহার গমন কালের বর্গের সমানুপাতী। বস্তুটি প্রথম 2 সেকেণ্ডে 64 ফুট অতিক্রম করিলে 7 সেকেণ্ডে উহা কতদূর অতিক্রম করিবে? পঞ্চম সেকেণ্ডে উহা কতদূর যাইবে?

[W.B.B.H.S.]

16. (i) একটি দোলকের দৈর্ঘ্য উহার মিনিট প্রতি স্পন্দন সংখ্যার বর্গের সহিত ব্যস্তভেদে থাকে। একটি 16 ফুট দীর্ঘ দোলকের মিনিটে 27 বার স্পন্দন হইলে যে-দোলকের মিনিটে 24 বার স্পন্দন হয়, তাহার দৈর্ঘ্য কত? [W.B.B H.S.]

(ii) দোলকের পুরা একবার দুলিবার সময় উহার দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সহিত সরল ভেদে থাকে। যদি 18 সে.মি. দীর্ঘ একটি দোলক $1\frac{1}{2}$ সেকেণ্ডে একবার দোলে, তবে যে-দোলক 2 সেকেণ্ডে একবার দোলে, তাহার দৈর্ঘ্য কত?

17. কোনস্থানের আলোর পরিমাণ স্থানটি হইতে আলোর উৎপত্তিস্থলের দূরত্বের বর্গের সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে। একটি বাতি হইতে 8 সেণ্টিমিটার দূরে অবস্থিত একটি বই আর কতটা দূরে সরাইলে উহা পূর্বপরিমাণের $\frac{1}{2}$ অংশ আলো পাইবে ?

18. কোন মালগাড়ীবিহীন ইঞ্জিন ঘণ্টায় 24 কিলোমিটার বেগে যাইতে পারে এবং ইহার গতি যে-পরিমাণ হ্রাস পায় তাহা উহার সহিত সংযুক্ত মালগাড়ীর সংখ্যার বর্গমূলের সমানুপাতী। যখন 4টি মালগাড়ী যুক্ত থাকে, তখন ইঞ্জিনের গতি ঘণ্টায় 20 কিলোমিটার। সর্বাধিক কত সংখ্যক মালগাড়ী ইঞ্জিনটি বহন করিতে পারে নির্ণয় কর।

19. কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উহার উচ্চতা ও ভূমির সহিত যৌগিক ভেদে থাকে। 18 সে. মি. উচ্চতা বিশিষ্ট এবং $33\frac{1}{6}$ সে.মি. ভূমিবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $298\frac{1}{2}$ বর্গ সে. মি. হইলে $10\frac{1}{3}$ সে. মি. ভূমি ও $2\frac{3}{4}$ সে. মি. উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত ?

20. কোন শঙ্কুর ঘনফল উহার উচ্চতা ও ভূমির ক্ষেত্রফলের সহিত সম্মিলিত ভেদে থাকে। যদি উচ্চতা 15 মিটার ও ভূমির ক্ষেত্রফল 10 বর্গমিটার হইলে শঙ্কুর ঘনফল 50 ঘনমিটার হয়, তবে যে-শঙ্কুর ঘনফল 770 ঘনমিটার ও উচ্চতা 15 মিটার তাহার বৃত্তাকার ভূমির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর ($\pi = \frac{22}{7}$)। [W. B. B. H. S.]

21. কোন পিরামিডের ঘনফল উহার উচ্চতা ও ভূমির ক্ষেত্রফলের সহিত যৌগিক ভেদে থাকে। যদি উচ্চতা 14 সে. মি. এবং ভূমির ক্ষেত্রফল 60 বর্গ সে. মি. হইলে পিরামিডের ঘনফল 280 ঘন সে. মি. হয়, তবে যে-পিরামিডের ঘনফল 390 ঘন সে. মি. এবং উচ্চতা 26 সে. মি. তাহার ভূমির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

22. (i) একটি গোলকের ওজন উহার ব্যাসার্ধের ঘন ও উহার পদার্থের ঘনত্বের সহিত যৌগিকভেদে আছে। দুইটি গোলকের ব্যাসার্ধের অনুপাত 17 : 8 এবং উহাদের পদার্থের ঘনত্বের অনুপাত 3 : 4. দ্বিতীয় গোলকটির ওজন 40 কিলোগ্রাম হইলে প্রথমটির ওজন কত ?

(ii) স্থূলত্ব (thickness) অপরিবর্তিত থাকিলে রৌপ্যমুদ্রার মূল্য উহার ব্যাসের বর্গের সহিত সরলভেদে থাকে এবং ব্যাস অপরিবর্তিত থাকিলে মূল্য স্থূলত্বের সহিত সরলভেদে থাকে। দুইটি রৌপ্যমুদ্রার ব্যাসের অনুপাত 5 : 6 ; যদি প্রথম রৌপ্যমুদ্রার মূল্য দ্বিতীয়টির তিনগুণ হয়, তাহা হইলে উহাদের স্থূলত্বের অনুপাত নির্ণয় কর।

23. ঘনত্ব অপরিবর্তিত থাকিলে তরল পদার্থের চাপ গভীরতার সহিত সরল ভেদে থাকে এবং গভীরতা অপরিবর্তিত থাকিলে চাপ ঘনত্বের সহিত সরলভেদে

থাকে। যখন গভীরতা ও ঘনত্ব যথাক্রমে 32 এবং 1, তখন চাপ 1 ; যখন ঘনত্ব 16 তখন কত গভীরতায় চাপ 2 হইবে ?

24. ভোলটেজ (voltage) অপরিবর্তিত থাকিলে তারের মাধ্যমে প্রবাহিত তড়িৎপ্রবাহ তারের ব্যাসের বর্গের সহিত সরল ভেদে এবং তারের দৈর্ঘ্যের সহিত ব্যস্তভেদে থাকে। যদি 3 কিলোমিটার লম্বা এবং 0·15 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি তারের মধ্য দিয়া 440 অ্যাম্পিয়ার (ampere) বিদ্যুৎ প্রবাহিত হয় তাহা হইলে $2\frac{1}{2}$ কিলোমিটার লম্বা এবং ·4 সে. মি. ব্যাস বিশিষ্ট একটি তারের মধ্যদিয়া কত বিদ্যুৎ প্রবাহিত হইবে তাহা নির্ণয় কর।

25. (i) যদি 3 জন লোক 16 দিনে 9 টাকা উপার্জন করে তবে চলরাশির পরিবর্তন (ভেদ) নিয়মের সাহায্যে কতজন লোক 8 দিনে 30 টাকা উপার্জন করিবে তাহা নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

(ii) যদি 5 জন লোক 9 দিনে 10 হেক্টর জমি চাষ করিতে পারে, তবে 25 জন লোকে কত সময়ে 30 হেক্টর জমি চাষ করিবে তাহা ভেদের প্রণালীতে নির্ণয় কর।

পঞ্চম অধ্যায়

প্রগতি (Progression)

5·1. **শ্রেণী ঃ** কোন নির্দিষ্ট নিয়মানুসারে গঠিত পরপর বিন্যস্ত কতকগুলি রাশিকে **শ্রেণী** (Series) বলে এবং ঐ রাশিগুলির প্রত্যেকটিকে ঐ শ্রেণীটির **পদ** (Term) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, (i) 1, 3, 5, 7,⋯ ⋯

(ii) 2, 6, 18, 54,⋯⋯

(i) শ্রেণীতে যে-কোন পদ, তৎপূর্ববর্তী পদটির সহিত 2 যোগ করিয়া পাওয়া যায় ;

(ii) শ্রেণীতে যে-কোন পদ, তৎপূর্ববর্তী পদটিকে 3 দ্বারা গুণ করিয়া পাওয়া যায়।

A. সমান্তর শ্রেণী

5·2. **সংজ্ঞা ঃ** যে-শ্রেণীতে যে-কোন পদ হইতে উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদটির অন্তর সর্বদা সমান, তাহাকে **সমান্তর শ্রেণী** বা **সমান্তর প্রগতি** (Arithmetical progression বা সংক্ষেপে A. P.) বলে এবং সতত সমান ঐ অন্তরটিকে শ্রেণীটির **সাধারণ অন্তর** (Common Difference) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, 1, 3, 5, 7,⋯⋯একটি সমান্তর শ্রেণী, উহার সাধারণ অন্তর 2 ;

8, 5, 2, −1,⋯⋯ একটি সমান্তর শ্রেণী, উহার সাধারণ অন্তর(−3).

কোন সমান্তর শ্রেণীর যে-কোন পদ হইতে তাহার ঠিক পূর্ববর্তী পদটি বিয়োগ করিলে শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর পাওয়া যায়। সাধারণতঃ দ্বিতীয় পদ হইতে প্রথম পদ বিয়োগ করিয়া সাধারণ অন্তর নির্ণয় করা হয়। সাধারণ অন্তর ধনাত্মকও হইতে পারে অথবা ঋণাত্মকও হইতে পারে।

$a, a+d, a+2d, a+3d,\cdots$ সমান্তর শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর $=(a+d)-a=d$;

$c, c-2b, c-4b, c-6b,\cdots$ সমান্তর শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর $=(c-2b)-c=-2b$.

টীকা ঃ $a, b, c, d,\cdots\cdots$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে, $b-a=c-b=d-c=\cdots$ হইবে। তিনটি রাশি সমান্তর শ্রেণীতে আছে বলিলে অঙ্কের সরলতার জন্য উহাদের ধরা হয় $a-b, a, a+b$ এবং একই কারণে সমান্তর শ্রেণীভুক্ত চারিটি রাশিকে ধরা হয় $a-3b, a-b, a+b, a+3b$.

5·3. সাধারণ পদ ঃ কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হইলে, সংজ্ঞানুসারে,

দ্বিতীয় পদ $= a+d = a+(2-1)d$

তৃতীয় পদ $= a+2d = a+(3-1)d$

চতুর্থ পদ $= a+3d = a+(4-1)d$

... ...

$\therefore$ n-তম পদ $= a+(n-1)d$.

কোন শ্রেণীর n-তম পদকে সেই শ্রেণীর **সাধারণ পদ** (General term) বলে এবং ইহাকে সাধারণতঃ 't_n' দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\therefore$ এক্ষেত্রে, $\boldsymbol{t_n = a+(n-1)d}$.

কোন শ্রেণীর পদসংখ্যা n হইলে উহার n-তম পদই উহার **শেষ পদ** (last term)। শেষপদকে সাধারণতঃ 'l' দ্বারা সূচিত করা হয়। সুতরাং পদসংখ্যা n হইলে,

$$\boldsymbol{l = a+(n-1)d}.$$

উদাহরণস্বরূপ, 1, 3, 5, 7,......সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অন্তর $d=3-1=2$.

সুতরাং, উহার ষোড়শ পদ $= t_{16} = a+(16-1)d = 31$

এবং সাধারণভাবে, n-তম পদ $= t_n = 1+(n-1)2 = 2n-1$.

কোন শ্রেণীর পদসংখ্যা n কখনও ঋণাত্মক সংখ্যা বা ভগ্নাংশ হইতে পারে না। ইহা সর্বদাই ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর দেওয়া থাকিলে ঐ শ্রেণীর যে-কোন পদ নির্ণয় করা যায় এবং শ্রেণীটি সম্পূর্ণরূপে লেখা যায়।

l-কে শেষপদ ধরিয়া n-সংখ্যক পদ বিশিষ্ট সমান্তর শ্রেণীটিকে বিপরীতক্রমে লিখিলে পাওয়া যায় $l, l-d, l-2d, \ldots\ldots, l-(n-1)d$.

কোন সমান্তর শ্রেণীর যে-কোন দুইটি পদ দেওয়া থাকিলে, শ্রেণীটি সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায়।

মনে কর, সমান্তর শ্রেণীটির p-তম পদ $= t_p = u$ এবং q-তম পদ $= t_q = v$ দেওয়া আছে। শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হইলে,

$$u = a+(p-1)d \text{ এবং } v = a+(q-1)d.$$

এই দুইটি সমীকরণ সমাধান করিয়া a ও d-এর মান পাওয়া যাইবে এবং শ্রেণীটি সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যাইবে।

টীকা ঃ প্রথম পদ (a), সাধারণ অন্তর (d), পদসংখ্যা (n) এবং n-তম পদ (t_n)-এই চারিটির যে-কোন তিনটি দেওয়া থাকিলে $t_n = a+(n-1)d$ সূত্রের সাহায্যে অবশিষ্টটি নির্ণয় করা যায়।

5·4. সমান্তর শ্রেণীর ধর্মাবলী ঃ

(i) কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রত্যেক পদের সহিত একই রাশি যোগ করিলে অথবা প্রত্যেক পদ হইতে একই রাশি বিয়োগ করিলে, প্রাপ্ত ফলগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে।

যদি সমান্তর শ্রেণীটি $a, a+d, a+2d, \cdots\cdots$ হয়, তবে শ্রেণীটির প্রত্যেক পদের সহিত একই রাশি x যোগ করিলে পাওয়া যায়,

$a+x, a+d+x, a+2d+x, \quad \cdots\cdots$

শেষোক্ত শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর d এবং ইহা একটি সমান্তর শ্রেণী।

অনুরূপভাবে, $a, a+d, a+2d, \cdots$ সমান্তর শ্রেণীটির প্রত্যেক পদ হইতে একই রাশি x বিয়োগ করিলে পাওয়া যায় $a-x, \; a+d-x, \; a+2d-x, \cdots\cdots$ এই শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর d. সুতরাং ইহা একটি সমান্তর শ্রেণী।

(ii) কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রত্যেক পদকে একই রাশিদ্বারা গুণ করিলে অথবা ভাগ করিলে প্রাপ্ত ফলগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে।

যদি সমান্তর শ্রেণীটি $a, a+d, a+2d, \cdots\cdots$ হয়, তবে শ্রেণীটির প্রত্যেক পদকে একটি রাশি x দ্বারা গুণ করিলে পাওয়া যায়,

$ax, ax+dx, ax+2dx, \quad \cdots\cdots$

শেষোক্ত শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর dx এবং ইহা একটি সমান্তর শ্রেণী।

অনুরূপভাবে, $a, a+d, a+2d, \cdots\cdots$ সমান্তর শ্রেণীটির প্রত্যেক পদকে একই রাশি x দ্বারা ভাগ করিলে পাওয়া যায় $\frac{a}{x}, \; \frac{a}{x}+\frac{d}{x}, \; \frac{a}{x}+2\frac{d}{x}, \; \cdots\cdots$

এই শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর $\frac{d}{x}$. সুতরাং ইহা একটি সমান্তর শ্রেণী।

5·5. সমান্তরীয় মধ্যক ঃ তিনটি রাশি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে, মধ্যবর্তী রাশিটিকে অপর দুইটি রাশির **সমান্তরীয় মধ্যক** (Arithmetic Mean বা সংক্ষেপে A. M.) বলে। উদাহরণস্বরূপ, 2, 5, 8 সমান্তর শ্রেণীভুক্ত তিনটি রাশি। এক্ষেত্রে 5-কে 2 ও 8-এর সমান্তরীয় মধ্যক বলে। তিনটি রাশি $a, \; m, \; b$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে, মধ্যপদটিকে অর্থাৎ m-কে a ও b-এর সমান্তরীয় মধ্যক বলে।

বিপরীতক্রমে, a ও b-এর সমান্তরীয় মধ্যক m হইলে, $a, \; m, \; b$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে।

$$\therefore \; m-a=b-m$$

অথবা, $2m=a+b$, অর্থাৎ $m=\frac{1}{2}(a+b)$.

সুতরাং দুইটি নির্দিষ্ট রাশির সমান্তরীয় মধ্যক হইল রাশি দুইটির সমষ্টির অর্ধ অর্থাৎ রাশি দুইটির গড়।

$$n\text{-সংখ্যক পদের সমান্তরীয় মধ্যক}=\frac{n\text{-সংখ্যক পদের সমষ্টি}}{n}.$$

$$\therefore\quad n\text{টি রাশি, } a_1, a_2, \cdots a_n\text{-এর সমান্তরীয় মধ্যক}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

যদি কোন সমান্তর শ্রেণীতে তিনের অধিক পদ থাকে, তবে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যবর্তী পদগুলিকে প্রথম ও শেষ পদের সমান্তরীয় মধ্যক বলে। উদাহরণস্বরূপ, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 এই সমান্তর শ্রেণীটির 4, 6, 8, 10, 12, 14-কে 2 ও 16-এর সমান্তরীয় মধ্যক বলে। এক্ষেত্রে 2 ও 16-এর মধ্যে 6টি সমান্তরীয় মধ্যক আছে। সাধারণভাবে, যদি $a, m_1, m_2, \cdots\cdots m_n, b$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হয়, তবে মধ্যবর্তী পদগুলিকে অর্থাৎ $m_1, m_2, \cdots\cdots m_n$ কে a ও b-এর n সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক বলে।

অনুসিদ্ধান্ত : যে-কোন দুইটি নির্দিষ্ট রাশির মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক স্থাপন করা যায়।

মনে কর, প্রদত্ত রাশি দুইটি a ও b এবং উহাদের মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক হইল $m_1, m_2, \cdots\cdots m_n$. তাহা হইলে $a, m_1, m_2, \cdots\cdots m_n, b$ একটি সমান্তর শ্রেণী। এই শ্রেণীটিতে $(n+2)$-সংখ্যক পদ আছে যাহার প্রথম পদ a এবং $(n+2)$-তম পদ b.

শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর d হইলে,

$$t_{n+2}=a+(n+2-1)d=a+(n+1)d=b. \quad \therefore \quad d=\frac{b-a}{n+1}.$$

$$\therefore \quad m_1=a+d=a+\frac{b-a}{n+1},\ m_2=a+2d=a+\frac{2(b-a)}{n+1}, \cdots$$

$$\cdots,\ m_n=a+nd=a+\frac{n(b-a)}{n+1}.$$

$$\therefore\quad \text{নির্ণেয় মধ্যকগুলি যথাক্রমে } a+\frac{b-a}{n+1}, a+\frac{2(b-a)}{n+1}, \cdots, a+\frac{n(b-a)}{n+1}.$$

শেষ মধ্যক $a+\frac{n(b-a)}{n+1}$-কে $b-d$ বা $b-\frac{b-a}{n+1}$ ও লেখা যায়।

5·6. সমান্তর শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয় ঃ

মনে কর, কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর d, পদসংখ্যা n এবং শেষপদ l.

মনে কর, সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n.

$$\therefore \quad S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots\cdots + (l-2d) + (l-d) + l.$$

শ্রেণীটিকে উল্টাইয়া লিখিলে,

$$S_n = l + (l-d) + (l-2d) + \cdots\cdots + (a+2d) + (a+d) + a.$$

অনুরূপ পদগুলি যোগ করিয়া,

$$2S_n = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}$$
$$= n(a+l).$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}(a+l).$$

যেহেতু, $l = \text{শেষপদ} = t_n = a + (n-1)d$,

$$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}\left\{a + a + (n-1)d\right\} = \frac{n}{2}\left\{2a + (n-1)d\right\}.$$

5·7. স্বাভাবিক সংখ্যা সম্বন্ধীয় সমষ্টি ঃ

1, 2, 3, 4, 5,······প্রভৃতি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যাগুলিকে **স্বাভাবিক সংখ্যা** (natural numbers) বলে। প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা (First n natural numbers) বলিলে 1 হইতে n পর্যন্ত ক্রমিক পূর্ণসংখ্যাগুলিকে বুঝায়।

(*a*) **প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি**

মনে কর, $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots\cdots + n.$

$\because$ ইহা একটি সমান্তর শ্রেণী যাহার প্রথম পদ $= 1$, শেষপদ $= n$ এবং পদসংখ্যা $= n$,

$$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}(1+n) \quad \text{অর্থাৎ} \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(*b*) **প্রথম n-সংখ্যক বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি**

মনে কর, $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$$= \frac{n}{2}\{2.1 + (n-1).2\} = \frac{n}{2}.2n = n^2. \quad \therefore \quad S_n = n^2.$$

(*c*) **প্রথম n-সংখ্যক জোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি**

মনে কর, $S_n = 2 + 4 + 6 + \cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$$= \frac{n}{2}\{2.2 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}.(2n+2) = n(n+1).$$

$$\therefore \quad S_n = n(n+1).$$

(d) **প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি**

মনে কর, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2$.

এক্ষণে, $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$ একটি অভেদ এবং n-এর যে-কোন মানের জন্য ইহার উভয় পক্ষের মান সমান। উহাতে n-এর স্থলে পর পর $1, 2, 3, \cdots n$ লিখিলে,

$$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3.n^2 - 3.n + 1$$

যোগ করিলে, $n^3 - 0 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$

$$= 3\ S_n - \tfrac{3}{2}n(n+1) + n.$$

$$\therefore \quad 3S_n = n^3 - n + \tfrac{3}{2}n(n+1) = n(n-1)(n+1) + \tfrac{3}{2}n(n+1)$$
$$= \tfrac{1}{2}n(n+1)(2n - 2 + 3) = \tfrac{1}{2}n(n+1)(2n+1).$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(e) **প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনফলের সমষ্টি**

মনে কর, $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + n^3$.

এক্ষণে, $n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$ একটি অভেদ এবং n-এর যে-কোন মানের জন্য ইহার উভয় পক্ষের মান সমান। উহাতে n-এর স্থলে পরপর $1, 2, 3, \cdots n$ লিখিলে,

$$1^4 - 0^4 = 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1$$
$$2^4 - 1^4 = 4.2^3 - 6.2^2 + 4.2 - 1$$
$$3^4 - 2^4 = 4.3^3 - 6.3^2 + 4.3 - 1$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$n^4 - (n-1)^4 = 4.n^3 - 6.n^2 + 4.n - 1$$

যোগ করিলে, $n^4 - 0 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) - 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$

$$+ 4(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - n$$

$$= 4\ S_n - 6.\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 4.\tfrac{1}{2}n(n+1) - n.$$

$$\therefore \quad 4\,S_n=(n^4+n)+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$$
$$=n(n+1)(n^2-n+1+2n+1-2)$$
$$=n(n+1)n(n+1)=\{n(n+1)\}^2.$$
$$\therefore \quad S_n=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $n^2(n+1)^2-(n-1)^2n^2=4n^3$ অভেদটিতে $n=1, 2, 3, \cdots n$ বসাইলে,

$$1^2.2^2-0^2.1^2=4.1^3$$
$$2^2.3^2-1^2.2^2=4.2^3$$
$$3^2.4^2-2^2.3^2=4.3^3$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$n^2(n+1)^2-(n-1)^2n^2=4n^3$$

যোগ করিলে, $n^2(n+1)^2-0=4(1^3+2^3+\cdots+n^3)=4\,S_n$.

$$\therefore \quad S_n=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

টীকা ঃ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$, অর্থাৎ প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনফলের সমষ্টি $=n$-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টির বর্গ।

5·8. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. (*a*) 2, 6, 10, 14, $\cdots$ শ্রেণীটির ষষ্ঠ, দশম ও ত্রয়োদশ পদ নির্ণয় কর।
[C. U. B. Com.]

(*b*) $-3, 1, 5, 9, \cdots\cdots$ শ্রেণীটির 57 কোন্ পদ?

(*c*) -32 কি $5, 2, -1, -4, \cdots\cdots$ শ্রেণীটির একটি পদ?

(*a*) শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর সর্বদা সমান বলিয়া ইহা একটি সমান্তর শ্রেণী।
এখানে প্রথম পদ $a=2$, সাধারণ অন্তর $d=6-2=4$.

$$\therefore \quad t_6=a+(6-1)d=2+5.4=22.$$
$$t_{10}=a+(10-1)d=2+9.4=38.$$
$$t_{13}=a+(13-1)d=2+12.4=50.$$

(*b*) সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ $=-3$ এবং সাধারণ অন্তর $=1-(-3)=4$.
মনে কর, শ্রেণীটির n-তম পদটি 57.

$$\therefore \quad 57=t_n=(-3)+(n-1)4=-3+4n-4=4n-7$$

অথবা, $4n=57+7=64$ অর্থাৎ $n=16$.

∴ শ্রেণীটির ষোড়শ পদটি 57.

(c) -32 যদি সমান্তর শ্রেণীটির কোন পদ হয়, তবে মনে কর, উহা শ্রেণীটির n-তম পদ। এখানে, শ্রেণীটির প্রথম পদ $=5$, সাধারণ অন্তর $=2-5=-3$.

$\therefore\quad -32=t_n=5+(n-1)(-3)=5-3n+3=8-3n$

অথবা, $3n=32+8=40$ অর্থাৎ $n=\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}$.

কিন্তু পদসংখ্যা n ভগ্নাংশ হইতে পারে না। সুতরাং -32 সমান্তর শ্রেণীটির কোন পদ নহে।

উদাহরণ 2. কোন সমান্তর শ্রেণীর চতুর্থ পদ 24 এবং দশম পদ 48. শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

মনে কর, শ্রেণীটির প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অন্তর $=d$.

$\therefore\quad 24=t_4=a+(4-1)d$ অর্থাৎ $a+3d=24$ ... (1)

এবং $48=t_{10}=a+(10-1)d$ অর্থাৎ $a+9d=48$ ... (2)

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া, $6d=24$ অর্থাৎ $d=4$.

$\therefore$ (1) হইতে, $a=24-3d=24-3.4=12$.

∴ নির্ণেয় শ্রেণীটি হইল 12, 16, 20, 24,......

উদাহরণ 3. 1 ও 41-এর মধ্যে 7টি সমান্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন কর।

1 ও 41-এর মধ্যে 7টি সমান্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন করিলে 9টি পদবিশিষ্ট একটি সমান্তর শ্রেণী হইবে, যাহার প্রথম পদ $=1$ এবং নবম পদ $=41$. মনে কর, সাধারণ অন্তর $=d$. তাহা হইলে, $41=t_9=1+(9-1)d$, অর্থাৎ $d=5$.

∴ নির্ণেয় মধ্যকগুলি যথাক্রমে $1+5,\ 1+2.5,\ 1+3.5,\ 1+4.5,\ 1+5.5,\ 1+6.5,\ 1+7.5$ অর্থাৎ 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36.

উদাহরণ 4. সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $20+18+16+\cdots\cdots$ 12-তম পদ পর্যন্ত।

(ii) $2+5+8+\cdots\cdots+152$.

(iii) $3+4+8+9+13+14+18+19+\cdots\cdots$ 20-তম পদ পর্যন্ত।

(i) এখানে, প্রথম পদ $a=20$, সাধারণ অন্তর $d=18-20=-2$ এবং পদসংখ্যা $n=12$.

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

$$=\frac{12}{2}\{2.20+(12-1)(-2)\}=6\times18=108.$$

(ii) এখানে, প্রথম পদ $a=2$, সাধারণ অন্তর $d=5-2=3$.

মনে কর, পদসংখ্যা $=n$. সুতরাং n-তম পদ বা শেষ পদ $=l=152$.

$\therefore\ a+(n-1)d=2+(n-1).3=152$, অর্থাৎ $n=51$.

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=\frac{n}{2}\ a+l)=\frac{51}{2}(2+152)=51\times77=3927$.

(iii) নির্ণেয় যোগফল $=(3+8+13+\cdots\cdots$ 10-তম পদ পর্যন্ত)

$+(4+9+14+\cdots\cdots$ 10-তম পদ পর্যন্ত)

$=\frac{10}{2}\{2.3+(10-1).5\}+\frac{10}{2}\{2.4+(10-1)5\}$

$=(5\times51)+(5\times53)=520$.

উদাহরণ 5. $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\cdots\cdots$ সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম কতগুলি পদের সমষ্টি $-1\frac{1}{2}$ হইবে ?

এখানে, প্রথম পদ $a=\frac{1}{2}$, সাধারণ অন্তর $d=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$.

মনে কর, n-পদের সমষ্টি $=-1\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$.

$\therefore\ \frac{n}{2}\{2.\frac{1}{2}+(n-1)(-\frac{1}{6})\}=-\frac{3}{2}$, অর্থাৎ, $n\left(\frac{6-n+1}{6}\right)=-3$

অথবা, $7n-n^2=-18$

অথবা, $n^2-7n-18=0$

অথবা, $(n+2)(n-9)=0$ অর্থাৎ $n=9,\ -2$.

পদসংখ্যা n ঋণাত্মক হইবে না বলিয়া, $n=9$.

$\therefore$ প্রদত্ত সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম 9টি পদের সমষ্টি $-1\frac{1}{2}$.

উদাহরণ 6. কোন শ্রেণীর প্রথম n-পদের সমষ্টি $n(4n+3)$ হইলে, শ্রেণীটি নির্ণয় কর। দেখাও যে, উহা একটি সমান্তর শ্রেণী। উহার দ্বাদশ পদটি কত ?

প্রথম n-পদের সমষ্টিকে s_n দ্বারা এবং $(n-1)$ পদের সমষ্টিকে s_{n-1} দ্বারা সূচিত করিলে, $t_n=s_n-s_{n-1}=n(4n+3)-(n-1)\{4(n-1)+3\}=8n-1$.

n-এর পরিবর্তে 1, 2, 3, 4, $\cdots$ বসাইলে শ্রেণীটি পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ শ্রেণীটি হইল 7, 15, 23, 31,$\cdots\cdots$

সাধারণ অন্তর সর্বদা 8 বলিয়া ইহা একটি সমান্তর শ্রেণী।

ইহার দ্বাদশ পদ $=8.12-1=95$.

উদাহরণ 7. n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2$ [C. P. U.]

(ii) $1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\cdots\cdots$

(iii) $2+5+10+17+\cdots\cdots$

(i) এখানে, $t_n=(2n-1)^2=4n^2-4n+1.$

এখন, n-এর স্থলে 1, 2, 3,⋯⋯ n লিখিলে,

$$t_1=4.1^2-4.1+1$$
$$t_2=4.2^2-4.2+1$$
$$t_3=4.3^2-4.3+1$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$t_n=4.n^2-4.n+1$$

∴ যোগ করিলে, n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি

$$=4(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)-4(1+2+3+\cdots\cdots+n)+n$$
$$=4.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4.\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=\tfrac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}=\tfrac{1}{3}n(4n^2-1).$$

(ii) এস্থলে, $t_n=(1+2+3+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত$)=\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n.$

এখন, n-এর স্থলে 1, 2, 3,⋯⋯n লিখিলে,

$t_1=\frac{1}{2}.1^2+\frac{1}{2}.1,\quad t_2=\frac{1}{2}.2^2+\frac{1}{2}.2,\cdots\cdots,\quad t_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n.$

∴ যোগ করিলে, নির্ণেয় সমষ্টি

$$=\tfrac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)+\tfrac{1}{2}(1+2+\cdots\cdots+n)$$
$$=\tfrac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\tfrac{1}{2}.\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\tfrac{1}{12}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

(iii) প্রদত্ত শ্রেণীটি একটি সমান্তর শ্রেণী না হইলেও পর পর দুইটি পদের অন্তরগুলি অর্থাৎ 3, 5, 7,⋯⋯একটি সমান্তর শ্রেণীতে আছে।

মনে কর, $S_n=2+5+10+17+\cdots\cdots+t_n$

আবার, $S_n=\quad 2+5+10+\cdots\cdots+t_{n-1}+t_n$

∴ বিয়োগ করিলে, $0=(2+3+5+7+\cdots\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত$)-t_n$

∴ $t_n=2+\{3+5+7+\cdots(n-1)$-তম পদ পর্যন্ত $\}$

$$=2+\tfrac{1}{2}(n-1)\{2.3+(n-2).2\}$$
$$=2+(n-1)(n+1)=n^2+1.$$

n-এর পরিবর্তে 1, 2, 3,⋯⋯,n বসাইলে,

$$t_1=1^2+1,\ t_2=2^2+1,\ t_3=3^2+1,\cdots\cdots,\quad t_n=n^2+1.$$

∴ যোগ করিলে, নির্ণেয় সমষ্টি $=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+n$

$$=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n=\tfrac{1}{6}n(2n^2+3n+7).$$

উদাহরণ 8. $1+2-3+4+5-6+7+8-9+\cdots$ ($3n+1$ -তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় যোগফল$=(1+2-3)+(4+5-6)+(7+8-9)+\cdots\cdots n$-তমপদ পর্যন্ত

+প্রদত্ত শ্রেণীটির $(3n+1)$-তম পদ

$=0+3+6+\cdots\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত$+(3n+1)$

$=\frac{1}{2}n\{2.0+(n-1).3\}+3n+1=\frac{1}{2}(3n^2+3n+2).$

উদাহরণ 9. $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে এবং $a+b+c\neq0$ হইলে, দেখাও যে, $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

$\because$ $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ সমান্তর শ্রেণীতে আছে,

$\therefore$ $\left(\frac{a}{b+c}+1\right), \left(\frac{b}{c+a}+1\right), \left(\frac{c}{a+b}+1\right)$

অর্থাৎ $\frac{a+b+c}{b+c}, \frac{a+b+c}{c+a}, \frac{a+b+c}{a+b}$ সমান্তর শ্রেণীতে আছে।

$\therefore$ $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ সমান্তর শ্রেণীতে আছে ($\because a+b+c\neq0$).

উদাহরণ 10. কোন সমান্তর শ্রেণীর p, q ও r সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে a, b ও c হইলে, দেখাও যে, $\frac{a}{p}\left(q-r\right)+\frac{b}{q}\left(r-p\right)+\frac{c}{r}\left(p-q\right)=0.$

মনে কর, সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ $=x$ এবং সাধারণ অন্তর $=y$.

$\therefore$ $a=\frac{p}{2}\left\{2x+(p-1)y\right\}$ অর্থাৎ $\frac{a}{p}=x+\frac{1}{2}y(p-1)$ $\cdots$ (1)

$b=\frac{q}{2}\left\{2x+(q-1)y\right\}$ অর্থাৎ $\frac{b}{q}=x+\frac{1}{2}y(q-1)$ $\cdots$ (2)

$c=\frac{r}{2}\left\{2x+(r-1)y\right\}$ অর্থাৎ $\frac{c}{r}=x+\frac{1}{2}y(r-1)$ $\cdots$ (3)

$\therefore$ (1), (2) ও (3) হইতে, $\frac{a}{p}\left(q-r\right)+\frac{b}{q}\left(r-p\right)+\frac{c}{r}\left(p-q\right)$

$=x(q-r+r-p+p-q)+\frac{1}{2}y\{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)$
$+(r-1)(p-q)\}$

$=0.$

উদাহরণ 11. তিনটি সংখ্যা সমান্তর শ্রেণীভুক্ত। তাহাদের সমষ্টি 6 এবং প্রথম ও তৃতীয়টির গুণফল 3. সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর। [W.B B.H.S.]

মনে কর, সংখ্যা তিনটি হইল $a-d, a, a+d$.

$\therefore$ উহাদের সমষ্টি $=(a-d)+a+(a+d)=3a=6$ অর্থাৎ $a=2$

এবং প্রথম ও তৃতীয়টির গুণফল $=(a-d)(a+d)=3$

অথবা, $a^2-d^2=4-d^2=3$

অথবা, $d^2=1$ অর্থাৎ $d=\pm 1$.

$\therefore$ সংখ্যা তিনটি হইল 1, 2, 3 অথবা 3, 2, 1.

উদাহরণ 12. এক ব্যক্তি তাহার এক বন্ধুর নিকট 1000 টাকা বিনাসুদে ধার করিল। মাসিক কিস্তিতে ঐ ধার পরিশোধ করিবে স্থির করিয়া ধার করিবার একমাস পরে 64 টাকা বন্ধুকে দিল এবং পর পর প্রতিমাসে কিস্তিতে 2 টাকা করিয়া কমাইল। কত মাসে ঐ ঋণ শোধ হইবে ? [W.B.B.H.S.]

মনে কর, নির্ণেয় মাসের সংখ্যা $=n$. প্রদত্ত সর্তানুসারে মাসিক কিস্তিগুলির পরিমাণ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

এখানে, প্রথমপদ $a=64$, সাধারণ অন্তর $d=-2$, n-পদের সমষ্টি $S_n=1000$.

$\therefore \quad \frac{n}{2}\{2\times 64+(n-1)(-2)\}=1000$

অথবা, $n^2-65n+1000=0$ অর্থাৎ $(n-25)(n-40)=0$.

$\therefore \quad n=25$ বা 40.

$n=40$ হইতে পারে না, কারণ $t_{40}=60+(40-1)(-2)=-18$.

ইহা ঋণরাশি ; কোন কিস্তির পরিমাণ ঋণরাশি হইতে পারে না। সুতরাং $n=40$ গ্রহণযোগ্য নহে।

$\therefore \quad n=25$ অর্থাৎ ঋণ পরিশোধ করিতে ব্যক্তিটির 25 মাস সময় লাগিবে।

প্রশ্নমালা V(A)

1. (*a*) 12, 10, 8, 6,······শ্রেণীটির ত্রয়োদশ এবং সপ্তদশ পদ নির্ণয় কর। ইহার সাধারণ পদ নির্ণয় কর।

(*b*) $\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}, \ldots\ldots$ এবং $1, \frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}, \ldots\ldots\ldots$

শ্রেণী দুইটির n-তম পদ দুইটি নির্ণয় কর।

2. 12, 15, 18,...... শ্রেণীটির কোন্ পদ 69 ?

3. 57 কি $-1, 2, 5, 8, \cdots\cdots$ শ্রেণীটির একটি পদ ?

4. একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 6 এবং সাধারণ অন্তর 2 হইলে, উহার পঞ্চদশ পদটি নির্ণয় কর।

5. $-8, -5, -2, 1, \cdots\cdots, 40$ শ্রেণীটিতে কতগুলি পদ আছে ?

6. একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 2 এবং 20-তম পদ 59 হইলে শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর কত ?

7. (*i*) একটি সমান্তর শ্রেণীর ষোড়শ পদ 27 এবং সাধারণ অন্তর 4 হইলে উহার প্রথম পদটি নির্ণয় কর।

(*ii*) কোন শ্রেণীর m-তম পদ $4m-5$ হইলে, শ্রেণীটি লিখ। উহার 19-তম পদটি কত ? দেখাও যে, শ্রেণীটি একটি সমান্তর শ্রেণী।

8. কোন সমান্তর শ্রেণীর সপ্তম পদ 15 এবং সপ্তদশ পদ 35 হইলে, শ্রেণীটি নির্ণয় কর। ইহার 23-তম পদটি কত ?

9. (*i*) কোন সমান্তর শ্রেণীর নবম পদ 13 এবং 21-তম পদ -23 হইলে, দেখাও যে, উহার প্রথম পদ 37 এবং সাধারণ অন্তর -3.

(*ii*) একটি সমান্তর শ্রেণীর p-তম এবং q-তম পদ যথাক্রমে c এবং d হইলে, শ্রেণীটির প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

10. একটি সমান্তর শ্রেণীর m-তম পদ n এবং n-তম পদ m হইলে, উহার p-তম পদটি কত ?

11. একটি সমান্তর শ্রেণীর পঞ্চম ও অষ্টম পদের সমষ্টি 46 এবং উহার একাদশ ও চতুর্দশ পদের সমষ্টি 94 ; শ্রেণীটি নির্ণয় কর। উহার 30-তম পদটি নির্ণয় কর।

12. (*a*) দেখাও যে, একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম ও শেষ দিক হইতে সমদূরবর্তী যে-কোন দুইটি পদের সমষ্টি ধ্রুবক এবং উহা শ্রেণীটির প্রথম ও শেষ পদের সমষ্টির সমান।

(*b*) দেখাও যে, n-সংখ্যক পদ বিশিষ্ট একটি সমান্তর শ্রেণীর যোগফল, n বিজোড় সংখ্যা হইলে উহার মধ্যপদের n-গুণ এবং
n জোড় সংখ্যা হইলে শ্রেণীটির মধ্যপদদ্বয়ের গড়ের n-গুণ।

13. সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর :

(i) $2\frac{1}{3}$ ও $3\frac{1}{2}$. (ii) $(a-b)^2$ ও $(a+b)^2$.

14. (*a*) 4 ও 324-এর মধ্যে 4টি সমান্তরীয় মধ্যক স্থাপন কর।

(*b*) 2 ও 57-এর মধ্যে 10টি সমান্তরীয় মধ্যক স্থাপন কর।

15. 10 এবং 52-এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক আছে, যাহাদের দ্বিতীয় মধ্যক : দশম মধ্যক $= 2 : 5$. মধ্যকের সংখ্যা নির্ণয় কর।

16. (a) সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $15+12+9+6+\cdots\cdots$16-তম পদ পর্যন্ত।

(ii) $\frac{1}{a}+\frac{2}{a}+\frac{3}{a}+\frac{4}{a}+\cdots\cdots$20-তম পদ পর্যন্ত।

(iii) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots$24-তম পদ পর্যন্ত।

(iv) $1{\cdot}2+1{\cdot}8+2{\cdot}4+\cdots\cdots$25-তম পদ পর্যন্ত।

(v) $\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}+\frac{4}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots$30-তম পদ পর্যন্ত।

(vi) $12+15+18+\cdots\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত।

(vii) $(a+b)^2+(a^2+b^2)+(a-b)^2+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(viii) $\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n}+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(ix) $-13-8-3+\cdots\cdots+182$.

(x) $2+3+7+8+12+13+17+18+\cdots\cdots$30-তম পদ পর্যন্ত।

(b) সমষ্টির সূত্রের সাহায্য না লইয়া সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $4+7+10+\cdots\cdots$112-তম পদ পর্যন্ত।

(ii) $1+4+7+\cdots\cdots+37$.

17. (a) 750 ও 1000-এর মধ্যবর্তী 13-এর গুণিতকগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

(b) কোন সমান্তর শ্রেণীর তৃতীয় ও ষষ্ঠ পদ যথাক্রমে 7 ও 13 হইলে, শ্রেণীটির প্রথম 20টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

18. (a) $3+5+7+\cdots\cdots$শ্রেণীটির কত সংখ্যক পদের সমষ্টি 168 ?

(b) $27+24+21+\cdots\cdots$শ্রেণীটির কত সংখ্যক পদের সমষ্টি 132 ? দুইটি উত্তর হওয়ার কারণ ব্যাখ্যা কর।

(c) কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 2, শেষ পদ 29 এবং সমষ্টি 155 হইলে, উহার সাধারণ অন্তর কত ? উহার পদসংখ্যা কত ? [C.P.U.]

(d) একটি সমান্তর শ্রেণীর অষ্টম পদ 23 হইলে, উহার প্রথম 15 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

19. (a) কোন শ্রেণীর প্রথম n-পদের সমষ্টি $2n(3n+4)$ হইলে, শ্রেণীটি নির্ণয় কর। দেখাও যে, উহা একটি সমান্তর শ্রেণী। উহার চতুর্দশ পদটি নির্ণয় কর। শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর কত ?

(b) 11, 9, 7,……শ্রেণীটির সপ্তম পদ হইতে আরম্ভ করিয়া 16টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(c) কোন সমান্তর শ্রেণীর $t_2 : t_4 = 3 : 7$ হইলে, দেখাও যে, $t_5 : t_9 = 9 : 17$.

(d) দুইটি সমান্তর শ্রেণীর n-পদের সমষ্টিদ্বয়ের অনুপাত $(2n+1) : (2n-1)$. উহাদের ষোড়শ পদদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর।

(e) কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম পদ a এবং q-তম পদ b হইলে, দেখাও যে, উহার $(p+q)$-সংখ্যক পদের সমষ্টি $\frac{1}{2}(p+q)\left(a+b+\frac{a-b}{p-q}\right)$.

(f) কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম 5টি পদের সমষ্টি 60 এবং প্রথম 10টি পদের সমষ্টি 220 হইলে, প্রথম 15টি পদের সমষ্টি কত ?

(g) একটি সমান্তর শ্রেণীর 12 তম পদ -13 এবং প্রথম চারটি পদের যোগফল 24 হইলে, উহার প্রথম 10টি পদের যোগফল বাহির কর। [H.S. 1978]

20. কোন শ্রেণীর n-তম পদ (a) $3n-2$, (b) $n(2n-1)$ হইলে, উহার n-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। দেখাও যে, (a) শ্রেণীটি একটি সমান্তর শ্রেণী।

21. (a) n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $5^2+8^2+11^2+\cdots\cdots$

(ii) $1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots$ [W.B.B. H.S.]

(iii) $n+2(n-1)+3(n-2)+4(n-3)+\cdots\cdots$ [W.B.B. H.S.]

(iv) $1.3+3.5+5.7+\cdots\cdots$

(v) $1^3+3^3+5^3+\cdots\cdots$

(vi) $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots$

(vii) $1.2^2+2.3^2+3.4^2+\cdots\cdots$

(viii) $1+(1+3)+(1+3+5)+\cdots\cdots$

(ix) $1+(3+5)+(7+9+11)+\cdots\cdots$

(x) $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+(1^2+2^2+3^2+4^2)+\cdots\cdots$

(xi) $(3^3-2^3)+(5^3-4^3)+(7^3-6^3)+\cdots\cdots$ [W.B.B.H.S.]

(xii) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots\cdots$

[$t_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$. এখন $n=1, 2, 3,\cdots\cdots n$ বসাইয়া যোগ কর]

(xiii) $1+3+6+10+15+\cdots\cdots$

(xiv) $2+11+28+53+86+\cdots\cdots$

(b) সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $1-3+5-7+\cdots\cdots n$ পদ পর্যন্ত।

(ii) $1-2+3-4+\cdots\cdots(2n+1)$ পদ পর্যন্ত।

(iii) $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots 2n$ পদ পর্যন্ত।

(iv) $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots (2n+1)$ পদ পর্যন্ত।

(v) $1+2-3+4+5-6+7+8-9+\cdots\cdots(3n+2)$ পদ পর্যন্ত।

(c) 90 এবং 890-এর মধ্যবর্তী অখণ্ড বর্গসংখ্যাগুলির যোগফল কত?

22. (a) $1+2+3+4+\cdots\cdots$ শ্রেণীটির প্রথম n পদের সমষ্টিকে S_n দ্বারা সূচিত করিলে, $\dfrac{S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n}{n}$-এর মান নির্ণয় কর। [C. P. U.]

(b) প্রথম পদ 1 এবং সাধারণ অন্তর যথাক্রমে 1, 2, 3-বিশিষ্ট তিনটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম n-পদের সমষ্টি যথাক্রমে S_1, S_2, S_3 হইলে, দেখাও যে,

$$S_1+S_3=2S_2. \qquad \text{[W.B.B H S.]}$$

(c) একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম n-পদের সমষ্টিকে S_n দ্বারা সূচিত করিলে, দেখাও যে, $S_{n+3}-3S_{n+2}+3S_{n+1}-S_n=0$ এবং

$qr(q-r)S_{pm}+rp(r-p)S_{qm}+pq(p-q)S_{rm}=0.$

(d) n-এর সর্বনিম্নমান কত হইলে $3+6+9+\cdots\cdots$ শ্রেণীটির n-পদ পর্যন্ত সমষ্টি 1000 অপেক্ষা বেশী হইবে?

23. (a) a, b, c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে, দেখাও যে,

(i) $b+c, c+a, a+b$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

(ii) $b+c-a, c+a-b, a+b-c$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

(iii) $(b+c)^2-a^2$, $(c+a)^2-b^2$, $(a+b)^2-c^2$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত, যদি $a+b+c\neq 0$ হয়।

(iv) $\dfrac{1}{bc}, \dfrac{1}{ca}, \dfrac{1}{ab}$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

(v) $a^2(b+c), b^2(c+a), c^2(a+b)$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত, যদি $bc+ca+ab\neq 0$.

(b) a^2, b^2, c^2 সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে, $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{a+b}$ সমান্তর শ্রেণীতে আছে।

(c) $\dfrac{b+c}{a}, \dfrac{c+a}{b}, \dfrac{a+b}{c}$ সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে, $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ সমান্তর শ্রেণীতে আছে, যদি $a+b+c\neq 0$ হয়।

(d) $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে, $\dfrac{1}{b-c}, \dfrac{1}{c-a}, \dfrac{1}{a-b}$ সমান্তর শ্রেণীতে আছে।

24. (a) কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম, q-তম ও r-তম পদ যথাক্রমে a, b ও c হইলে, দেখাও যে, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0.$

(*b*) কোন সমান্তর শ্রেণীর p, q ও r সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে a, b ও c হইলে, দেখাও যে, $aqr(q-r)+brp(r-p)+cpq(p-q)=0$.

25. (*a*) সমান্তর শ্রেণীভুক্ত তিনটি সংখ্যার সমষ্টি 21 এবং উহাদের বর্গের সমষ্টি 155 হইলে সংখ্যা তিনটি কি কি ?

(*b*) কোন সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলি সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে, বাহুগুলি **3 : 4 : 5** অনুপাত আছে।

(*c*) চারিটি রাশি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত। উহাদের প্রথম ও চতুর্থ টির যোগফল **11** এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির গুণফল $29\frac{1}{4}$; রাশিগুলি নির্ণয় কর।

(*d*) **15**-কে সমান্তর শ্রেণীভুক্ত পাঁচটি ভাগে ভাগ কর যাহাতে অংশগুলির বর্গের সমষ্টি 55 হয়।

26. কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী। যদি ক্ষুদ্রতম কোণটি 84° এবং সাধারণ অন্তর 12° হয়, তবে বহুভুজটির বাহুসংখ্যা কত ?

27. (*a*) তুমি আজ **1** প , আগামীকাল **2** প., তার পরের দিন **3** প., এইভাবে জমাইতে আরম্ভ করিলে। 365 দিন পরে তোমার কত জমিবে ? [B. U. Ent.]

(*b*) উদ্বৃত্ত নগদ পরীক্ষা করার জন্য কোন ব্যাঙ্কের অডিটর নগদ **4500** টাকা গণনার জন্য একজন সহকারী নিয়োগ করিলেন। প্রথম দশ মিনিটের প্রতিমিনিটে সে ব্যক্তি 150 টাকা গুণিল কিন্তু তাহার পর, প্রতি মিনিটে পূর্বমিনিট অপেক্ষা 2 টাকা কম গুণিতে সুরু করিল। 4500 টাকা গুণিতে তাহার কত সময় লাগিবে ? [C. U. B. Com.]

28. একটি ক্লাসের ছাত্রদের বয়স সমান্তর শ্রেণীতে আছে। শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর 3 মাস। ছাত্রদের বয়সের সমষ্টি **153** বৎসর। কনিষ্ঠ ছাত্রটির বয়স **7** বৎসর হইলে ছাত্রসংখ্যা নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

29. এক ব্যক্তি তাহার 3600 টাকার বিনাসুদের ঋণ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত **40**টি বাৎসরিক কিস্তিতে শোধ করিবে বলিয়া ঠিক করিল। **30**টি কিস্তি দেবার পর যখন ব্যক্তিটি মারা গেল তখন দেখা গেল ঋণের এক-তৃতীয়াংশ শোধ হয় নাই। প্রথম কিস্তিতে ব্যক্তিটি কত টাকা দিয়াছিল ? [W.B.B.H.S.]

30. 600 মিটার গভীর একটি কূপখননের খরচ নিম্নে বর্ণিত হইল :
প্রথম মিটারের জন্য 25 পয়সা এবং পরবর্তী প্রতি মিটারের জন্য অতিরিক্ত 4 পয়সা খরচ লাগে কূপটির 500-তম মিটার খনন করিতে এবং সমগ্র কূপটি খনন করিতে কত খরচ পড়িবে ? [B.U.B.Com.]

31. একটি সোজা রাস্তার উপর পর পর এক মিটার ব্যবধানে **100**টি প্রস্তর রাখা

আছে। এক ব্যক্তি প্রথম প্রস্তর হইতে এক মিটার দূরে স্থাপিত একটি ঝুড়ি হইতে দৌড়াইতে আরম্ভ করিয়া প্রতিবারে একটি করিয়া প্রস্তর ঐ ঝুড়িতে আনিতে লাগিল। সমস্ত প্রস্তরগুলি ঝুড়িতে ভরিতে হইলে ব্যক্তিটিকে মোট কত পথ দৌড়াইতে হইবে ? [W.B.B.H.S.]

32 কোন স্থান হইতে A রওনা হইয়া ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার বেগে যাইতে লাগিল। তাহার $4\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে B রওনা হইয়া একই দিকে প্রথম ঘণ্টায় 3 কিলোমিটার, দ্বিতীয় ঘণ্টায় $3\frac{1}{2}$ কিলোমিটার, তৃতীয় ঘণ্টায় 4 কিলোমিটার, এইভাবে যাইতে লাগিল। B কত ঘণ্টায় A-কে ধরিবে ? [W.B.B.H.S.]

[নির্ণেয় ঘণ্টার সংখ্যা n হইলে, $5 \times 4\frac{1}{2} + 5n = \frac{1}{2}n\{2.3 + (n-1).\frac{1}{2}\}$]

B. গুণোত্তর শ্রেণী

5·9. সংজ্ঞা ঃ যদি কোন শ্রেণীর অন্তর্গত প্রথম পদ ভিন্ন যে-কোন পদ ও উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বদা সমান হয়, তাহা হইলে ঐ শ্রেণীকে **গুণোত্তর শ্রেণী** বলে এবং ঐ শ্রেণীর পদগুলিকে **গুণোত্তর প্রগতিতে** (Geometrical Progression-বা সংক্ষেপে G. P.তে) আছে বলা হয়। সতত সমান ঐ অনুপাতটিকে শ্রেণীটির **সাধারণ অনুপাত** (Common ratio) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, 1, 2, 4, 8,······একটি গুণোত্তর শ্রেণী, উহার সাধারণ অনুপাত **2** ;

$9, -3, 1, -\frac{1}{3}$,······একটি গুণোত্তর শ্রেণী, উহার সাধারণ অনুপাত $-\frac{1}{3}$.

কোন গুণোত্তর শ্রেণীর যে-কোন পদকে তাহার ঠিক পূর্ববর্তী পদটি দ্বারা ভাগ করিলে শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত পাওয়া যায়। সাধারণতঃ দ্বিতীয় পদকে প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করিয়া সাধারণ অনুপাত নির্ণয় করা হয়।

সাধারন অনুপাত ধনাত্মকও হইতে পারে অথবা ঋণাত্মকও হইতে পারে।

a, ar, ar^2, ar^3,······গুণোত্তর শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত $= \frac{ar}{a} = r$.

$cd^3, -cd, \frac{c}{d}, -\frac{c}{d^3}$,······গুণোত্তর শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত $= \frac{-cd}{cd^3} = -\frac{1}{d^2}$.

টীকা ঃ $a, b, c, d, \cdots$ গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে, $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \cdots$ হইবে। তিনটি রাশি গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে বলিলে অঙ্কের সরলতার জন্য উহাদের ধরা হয় $\frac{a}{b}, a, ab$ এবং একই কারণে গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত চারিটি রাশিকে ধরা হয়,

$$\frac{a}{b^3}, \frac{a}{b}, ab, ab^3.$$

5·10. সাধারণ পদ ঃ কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হইলে, সংজ্ঞানুসারে,

দ্বিতীয় পদ$=ar=ar^{2-1}$

তৃতীয় পদ$=ar^2=ar^{3-1}$

চতুর্থ পদ$=ar^3=ar^{4-1}$

... ...

সাধারণ পদ বা **n-তম পদ**$=t_n=ar^{n-1}$.

শ্রেণীর পদসংখ্যা n হইলে উহার n-তম পদই উহার শেষপদ।

শেষপদকে l দ্বারা সূচিত করিলে, $l=ar^{n-1}$.

উদাহরণস্বরূপ, 1, 2, 4, 8,......গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রথমপদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=\frac{2}{1}=2$. সুতরাং উহার ষোড়শপদ$=t_{16}=1.2^{16-1}=2^{15}$ এবং সাধারণভাবে, n-তম পদ$=t\ =2^{n-1}$.

অনুসিদ্ধান্ত ঃ কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত দেওয়া থাকিলে ঐ শ্রেণীর যে-কোন পদ নির্ণয় করা যায় এবং শ্রেণীটিকে সম্পূর্ণরূপে লেখা যায়।

l-কে শেষপদ ধরিয়া n-সংখ্যক পদ বিশিষ্ট গুণোত্তর শ্রেণীটিকে বিপরীতক্রমে লিখিলে পাওয়া যায়ঃ $l, \frac{l}{r}, \frac{l}{r^2}, \ldots\ldots \frac{l}{r^{n-1}}$.

টীকা ঃ কোন গুণোত্তর শ্রেণীর যে-কোন দুইটি পদ দেওয়া থাকিলে, শ্রেণীটি সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায়।

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীটির p-তম পদ$=t_p=u$ এবং q-তম পদ$=t_q=v$ দেওয়া আছে। শ্রেণীটির প্রথমপদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হইলে,

$$u=ar^{p-1} \text{ এবং } v=ar^{q-1}.$$

এই দুইটি সমীকরণ সমাধান করিয়া a ও r-এর মান পাওয়া যাইবে এবং শ্রেণীটি সম্পূর্ণরূপে পাওয়া যাইবে।

প্রথমপদ a, সাধারণ অনুপাত r, পদসংখ্যা n এবং n-তম পদ t_n—এই চারিটির যে-কোন তিনটি দেওয়া থাকিলে, $t_n=ar^{n-1}$ সূত্রের সাহায্যে অবশিষ্টটি নির্ণয় করা যায়।

5·11. গুণোত্তর শ্রেণীর ধর্মাবলী ঃ

(i) কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রত্যেকপদকে একই রাশিদ্বারা গুণ করিলে অথবা ভাগ করিলে প্রাপ্ত ফলগুলি গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে।

যদি গুণোত্তর শ্রেণীটি $a, ar, ar^2, \cdots\cdots$হয়, তবে শ্রেণীটির প্রত্যেকপদকে একই রাশি x দ্বারা গুন করিলে পাওয়া যায়,

$ax, arx, ar^2x, \cdots\cdots$

শেষোক্ত শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত r এবং ইহা একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

অনুরূপভাবে, $a, ar, ar^2, \cdots\cdots$গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রত্যেক পদকে একই রাশি x দ্বারা ভাগ করিলে পাওয়া যায়, $\frac{a}{x}, \frac{ar}{x}, \frac{ar^2}{x}, \cdots\cdots$.

এই শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত r; সুতরাং ইহা একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

(ii) গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত রাশিগুলির অন্যোন্যকগুলিও গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে।

$a, ar, ar^2, \cdots\cdots$রাশিগুলি গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত। ইহাদের অন্যোন্যকগুলি হইল $\frac{1}{a}, \frac{1}{ar}, \frac{1}{ar^2}, \cdots\cdots$ ইহাদের সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{r}$. সুতরাং ইহারাও গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

(iii) গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত রাশিগুলিকে একই ঘাতে উন্নীত করিলে উহারাও গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে।

$a, ar, ar^2, \cdots\cdots$রাশিগুলি গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত। ইহাদের m ঘাতে উন্নীত করিলে রাশিগুলি হয় $a^m, a^m r^m, a^m r^{2m}, \cdots\cdots$. ইহাদের সাধারণ অনুপাত r^m. সুতরাং ইহারাও গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

5·12. গুণোত্তরীয় মধ্যক ঃ

তিনটি রাশি গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে মধ্যবর্তী রাশিটিকে অপর দুইটি রাশির **গুণোত্তরীয় মধ্যক** (Geometric Mean বা সংক্ষেপে G.M.) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, 2, 6, 18 গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত তিনটি রাশি। এক্ষেত্রে 6-কে 2 ও 18-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে। তিনটি রাশি a, G, b গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে মধ্যপদটিকে অর্থাৎ G-কে a ও b-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে।

বিপরীতক্রমে, aওb-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক G হইলে a, G, b গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে।

$\therefore \frac{G}{a}=\frac{b}{G}$ অথবা $G^2=ab$ অর্থাৎ $G=\pm\sqrt{ab}$.

সুতরাং দুইটি নির্দিষ্ট রাশির গুণোত্তরীয় মধ্যক হইল রাশি দুইটির গুণফলের বর্গমূল।

n-সংখ্যক পদের গুণোত্তরীয় মধ্যক = রাশিগুলির গুণফলের n-তম মূল।

$\therefore$ n-টি রাশি $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক $=\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}$.

যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীতে তিনের অধিক পদ থাকে, তবে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যবর্তী পদগুলিকে প্রথম ও শেষ পদের গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে। উদাহরণস্বরূপ, 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458 এই গুণোত্তর শ্রেণীটির 6, 18, 54, 162, 486-কে 2 ও 1458-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে। এক্ষেত্রে 2 ও 1458-এর মধ্যে 5টি গুণোত্তরীয় মধ্যক আছে। সাধারণভাবে, a, G_1, $G_2, \cdots\cdots G_n$, b গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে মধ্যবর্তী পদগুলিকে অর্থাৎ G_1, $G_2, \cdots\cdots G_n$-কে a ও b-এর n-সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যে-কোন দুইটি নির্দিষ্ট রাশির মধ্যে n-সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যক স্থাপন করা যায়।

মনে কর, প্রদত্ত রাশি দুইটি a ও b এবং উহাদের মধ্যে n-সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যক হইল G_1, $G_2, \cdots\cdots G_n$; তাহা হইলে a, G_1, $G_2, \cdots G_n$, b একটি গুণোত্তর শ্রেণী। এই শ্রেণীটিতে $(n+2)$-সংখ্যক পদ আছে যাহার প্রথম পদ a, এবং $(n+2)$-তম পদ b.

শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত r হইলে, $t_{n+2} = ar^{n+2-1} = ar^{n+1} = b$.

$$\therefore \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি হইল $ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots ar^n$

অর্থাৎ $a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \quad a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}, \cdots\cdots a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}.$

5·12. গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয় ঃ

মনে কর, কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, পদসংখ্যা n এবং গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n.

$$\therefore \quad S_n = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} \qquad \cdots \qquad (1)$$

উভয় পক্ষকে r দ্বারা গুণ করিয়া,

$$r.S_n = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \qquad \cdots \qquad (2)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,

$$S_n - r.S_n = a - ar^n.$$

$$\therefore \quad S_n = a\frac{1-r^n}{1-r} = a\frac{r^n-1}{r-1}.$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ শ্রেণীটির শেষপদ l হইলে, $l = ar^{n-1}$.

$$\therefore \quad S_n = \frac{a-rl}{1-r} = \frac{rl-a}{r-1}.$$

টীকা : $r<1$ হইলে, $S_n=a\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a-rl}{1-r}$

এবং $r>1$ হইলে, $S_n=a\frac{r^n-1}{r-1}=\frac{rl-a}{r-1}$ সূত্র প্রয়োগ করিতে হয়।

$r=1$ হইলে ঐ সূত্রগুলি অর্থহীন হইয়া পড়ে ; তখন

$$S_n=a+a+\cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}=na.$$

5·14. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. 2, 6, 18, 54,······ শ্রেণীটির অষ্টম ও সাধারণ পদ নির্ণয় কর। শ্রেণীটির কোন্ পদ 1458 ? 5832 কি শ্রেণীটির একটি পদ ?

শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত সর্বদা সমান বলিয়া ইহা একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

এখানে, প্রথমপদ $a=2$ এবং সাধারণ অনুপাত $r=6\div 2=3$.

$$\therefore \quad t_8=ar^{8-1}=2.3^7=4374.$$

সাধারণ পদ $=t_n=ar^{n-1}=2.3^{n-1}$.

মনে কর, শ্রেণীটির n-তম পদ 1458.

$\therefore \quad 2.3^{n-1}=1458$

অথবা, $3^{n-1}=729=3^6$

অথবা, $n-1=6$ অর্থাৎ $n=7$.

সুতরাং 1458 শ্রেণীটির সপ্তম পদ।

5832 গুণোত্তর শ্রেণীটির যদি কোন পদ হয়, মনে কর, উহা শ্রেণীটির m-তম পদ।

$$\therefore \quad t_m=2.3^{m-1}=5832 \quad \text{অথবা,} \quad 3^{m-1}=2916.$$

ইহা হইতে m-এর কোন পূর্ণসংখ্যার মান পাওয়া যায় না,

কারণ, $3^7=2187<2916$ এবং $3^8=6561>2916$.

সুতরাং, 5832 গুণোত্তর শ্রেণীটির কোন পদ নহে।

উদাহরণ 2. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর পঞ্চমপদ 81 এবং দ্বিতীয়পদ 24. শ্রেণীটি নির্ণয় কর। [W. B. B. H. S.]

মনে কর, শ্রেণীটির প্রথমপদ a এবং সাধারণ অনুপাত r.

$\therefore \quad 24=t_2=ar^{2-1}$ অর্থাৎ $ar=24$ ··· (1)

এবং $81=t_5=ar^{5-1}$ অর্থাৎ $ar^4=81$ ··· (2)

(2)-কে (1) দ্বারা ভাগ করিলে, $r^3=\frac{27}{8}=(\frac{3}{2})^3$ অর্থাৎ $r=\frac{3}{2}$.

(1) হইতে $a=24\times\frac{2}{3}=16$.

$\therefore$ নির্ণেয় শ্রেণীটি হইল 16, 24, 36, 54,······

উদাহরণ 3. $\frac{1}{9}$ ও 9-এর মধ্যে 3টি গুণোত্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন কর।

$\frac{1}{9}$ ও 9-এর মধ্যে 3টি গুণোত্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন করিলে 5টি পদ বিশিষ্ট একটি গুণোত্তর শ্রেণী হইবে, যাহার প্রথম পদ $=\frac{1}{9}$ এবং পঞ্চম পদ $=9$.

মনে কর, শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত r ;

তাহা হইলে, $9=t_5=\frac{1}{9}.r^{5-1}$ অর্থাৎ $r^4=81=3^4$. $\therefore\ r=\pm 3$.

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি হইল $\frac{1}{9}(\pm 3)$, $\frac{1}{9}(\pm 3)^2$, $\frac{1}{9}(\pm 3)^3$

অর্থাৎ $\frac{1}{3}, 1, 3$ বা $-\frac{1}{3}, 1, -3$.

উদাহরণ 4. সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $1+2+4+8+\cdots\cdots$ 20-তম পদ পর্যন্ত। (ii) $2-6+18-\cdots-486$.

(iii) $\frac{1}{2}+3(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+3(\frac{1}{2})^4+\cdots\cdots$ 12-তম পদ পর্যন্ত। [C. P. U.]

(i) এখানে, প্রথমপদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=2\div 1=2$ এবং পদসংখ্যা $n=20$.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় যোগফল}=a.\frac{r^n-1}{r-1}=1.\frac{2^{20}-1}{2-1}=2^{20}-1=1048575.$$

(ii) এখানে, প্রথম পদ $a=2$, সাধারণ অনুপাত $r=(-6)\div 2=-3$ এবং শেষপদ $l=-486$.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় যোগফল}=\frac{lr-a}{r-1}=\frac{(-486)(-3)-2}{-3-1}=\frac{1458-2}{-4}=-364.$$

(iii) নির্ণেয় যোগফল $=[\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^3+\cdots\cdots$ ষষ্ঠ পদ পর্যন্ত $]$

$+3[(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^4+\cdots\cdots$ ষষ্ঠ পদ পর্যন্ত$]$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1-\{(\frac{1}{2})^2\}^6}{1-(\frac{1}{2})^2}+3.(\frac{1}{2})^2.\frac{1-\{(\frac{1}{2})^2\}^6}{1-(\frac{1}{2})^2}$$

$$=\{1-(\tfrac{1}{2})^{12}\}(\tfrac{2}{3}+1)=1\frac{2729}{4096}.$$

উদাহরণ 5. 3, -6, 12,$\cdots\cdots$ শ্রেণীটির কতগুলি পদ লইলে উহাদের সমষ্টি 513 হইবে ?

এখানে, প্রথম পদ $a=3$, সাধারণ অনুপাত $r=(-6)\div 3=-2$.

মনে কর, n-পদের সমষ্টি $=513$.

$$\therefore\ 3.\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}=1-(-2)^n=513$$

অথবা, $(-2)^n=-512=(-2)^9$ অর্থাৎ $n=9$.

সুতরাং গুণোত্তর শ্রেণীটির 9টি পদ লইলে উহাদের সমষ্টি 513 হইবে।

উদাহরণ 6. কোন শ্রেণীর প্রথম n-পদের সমষ্টি $3^{n+1}-3$ হইলে, শ্রেণীটি নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, ইহা একটি গুণোত্তর শ্রেণী। শ্রেণীটির ষষ্ঠপদটি নির্ণয় কর।

প্রথম n-পদের সমষ্টিকে S_n দ্বারা সূচিত করিলে,

n-তম পদ $=t_n=S_n-S_{n-1}=(3^{n+1}-3)-(3^n-3)=2.3^n$.

$$\frac{t_n}{t_{n-1}}=\frac{2.3^n}{2.3^{n-1}}=3=\text{ধ্রুবক।}$$

∴ শ্রেণীটি একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

t_n-এ n-এর পরিবর্তে 1, 2, 3, 4,⋯⋯ বসাইলে শ্রেণীটির পদগুলি পাওয়া যাইবে।

∴ শ্রেণীটি হইল 6, 18, 54,⋯⋯

ইহার ষষ্ঠপদ $=2.3^6=1458$.

উদাহরণ 7. n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $5+55+555+\cdots\cdots$

(ii) $1+3.4+5.4^2+7.4^3+\cdots\cdots$

(iii) $1+3+7+15+\cdots\cdots$

(i) $S_n=5(1+11+111+\cdots\cdots n$ পদ পর্যন্ত$)$

$=\frac{5}{9}(9+99+999+\cdots\cdots n$ পদ পর্যন্ত$)$

$=\frac{5}{9}[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots\cdots n$ পদ পর্যন্ত $]$

$=\frac{5}{9}[(10+10^2+10^3+\cdots n$ পদ পর্যন্ত$)-n]$

$$=\frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right]=\frac{5}{9}[\tfrac{10}{9}(10^n-1)-n].$$

(ii) শ্রেণীটির n-তম পদ $=t_n=\{1+(n-1)2\}4^{n-1}=(2n-1)4^{n-1}$.

$$\therefore\quad S_n=1+3.4+5.4^2+7.4^3+\cdots\cdots+(2n-1)4^{n-1}$$

$$4S_n=\quad 1.4+3.4^2+5.4^3+\cdots\cdots+(2n-3)4^{n-1}+(2n-1)4^n$$

বিয়োগ করিলে, $-3S_n=1+2.4+2.4^2+2.4^3+\cdots+2.4^{n-1}-(2n-1)4^n$

$=1+2.4[1+4+4^2+\cdots(n-1)$ পদ পর্যন্ত$]-(2n-1)4^n$

$$=1+8.\frac{4^{n-1}-1}{4-1}-(2n-1)4^n.$$

$$\therefore\quad S_n=\tfrac{1}{3}(2n-1)4^n-\tfrac{8}{9}.4^{n-1}+\tfrac{5}{9}$$

$$=\tfrac{1}{9}\{3(2n-1)4^n-2.4^n+5\}=\tfrac{1}{9}\{(6n-5)4^n+5\}.$$

টীকা : প্রদত্ত শ্রেণীটির n-তম পদের দুইটি উৎপাদক আছে—প্রথমটি একটি সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ এবং দ্বিতীয়টি একটি গুণোত্তর শ্রেণীর n-তম পদ।

এইরূপ শ্রেণীকে **সমান্তরীয় গুণোত্তর** শ্রেণী (Arithmetico-Geometrical Series) বলে।

(iii) প্রদত্ত শ্রেণীটি একটি গুণোত্তর শ্রেণী না হইলেও দুইটি ক্রমিক পদের অন্তরগুলি অর্থাৎ 2, 4, 8,⋯⋯ একটি গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে।

মনে কর, $S_n = 1+3+7+15+\cdots\cdots+t_n$

আবার, $S_n = \quad 1+3+\ 7+\cdots\cdots+t_{n-1}+t_n$

∴ বিয়োগ করিলে, $0=(1+2+4+8+\cdots\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত$)-t_n$

$\therefore\ t_n = 1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$$=1.\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1.$$

n-এর পরিবর্তে 1, 2, 3,⋯⋯n বসাইয়া,

$t_1 = 2^1-1,\ t_2 = 2^2-1,\ t_3 = 2^3-1,\ \cdots\cdots,\ t_n = 2^n-1.$

∴ যোগ করিয়া, নির্ণেয় সমষ্টি $= S_n = (2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n)-n$

$$=2.\frac{2^n-1}{2-1}-n=2(2^n-1)-n.$$

উদাহরণ 8. $1+(5+5^2)+(5^3+5^4+5^5)+(5^6+5^7+5^8+5^9)+\cdots$-এর দশম বিভাগের শ্রেণীটির সমষ্টি নির্ণয় কর।

প্রথম বিভাগের প্রথম পদ $=1=5^0$ এবং পদসংখ্যা $=1$,

দ্বিতীয় বিভাগের প্রথম পদ $=5=5^{0+1}$ এবং পদসংখ্যা $=2$,

তৃতীয় বিভাগের প্রথম পদ $=5^3=5^{0+1+2}$ এবং পদসংখ্যা $=3$,

চতুর্থ বিভাগের প্রথম পদ $=5^6=5^{0+1+2+3}$ এবং পদসংখ্যা $=4$,

… … …

… … …

∴ দশম বিভাগের প্রথম পদ $=5^{0+1+2+3+\cdots \text{দশম পদ পর্যন্ত}}=5^{45}$

এবং পদসংখ্যা $=10$.

∴ দশম বিভাগের যোগফল $=5^{45}+5^{46}+5^{47}+\cdots\cdots 10$ পদ পর্যন্ত

$$=5^{45}.\frac{5^{10}-1}{5-1}=\frac{5^{45}}{4}(5^{10}-1).$$

উদাহরণ 9. a, b, c, d গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে, দেখাও যে, $a^2+b^2,\ b^2+c^2,\ c^2+d^2$ গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

a, b, c, d গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত বলিয়া, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$ (মনে কর)।

$\therefore\ a=bk,\ b=ck,\ c=dk.$

এখন, $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{b^2k^2+c^2k^2}{b^2+c^2}=k^2$ এবং $\frac{b^2+c^2}{c^2+d^2}=\frac{c^2k^2+d^2k^2}{c^2+d^2}=k^2$.

$$\therefore \quad \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{b^2+c^2}{c^2+d^2}.$$

$\therefore \quad a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+d^2$ গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

উদাহরণ 10. a, b ও c কোন গুণোত্তর শ্রেণীর যথাক্রমে p-তম, q-তম ও r-তম পদ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^{q-r}.\ b^{r-p}.\ c^{p-q}=1$. [W.B.B.H.S.]

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ x এবং সাধারণ অনুপাত y.

$\therefore \quad a=xy^{p-1}, \quad b=xy^{q-1}$ এবং $c=xy^{r-1}$.

$\therefore a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=x^{q-r+r-p+p-q}.y^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$

$$=x^0.y^0=1.$$

উদাহরণ 11. 21-কে এমন তিন অংশে বিভক্ত কর, যেন অংশগুলি একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে এবং তাহাদের গুণফল 64 হয়।

মনে কর, অংশ তিনটি হইল $\frac{a}{r}, a, ar$.

$$\therefore \quad \frac{a}{r}+a+ar=21 \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $\frac{a}{r}.\ a.\ ar=a^3=64=4^3$ অর্থাৎ, $a=4$.

$\therefore \quad (1)$ হইতে, $\quad 4+4r+4r^2=21r$

অথবা, $\quad 4r^2-17r+4=0$ অথবা, $(4r-1)(r-4)=0$ অর্থাৎ $r=\frac{1}{4}$ বা 4.

$\therefore \quad$ অংশগুলি হইল 16, 4, 1 অথবা 1, 4, 16.

উদাহরণ 12. এক ব্যক্তি 8190 টাকা বিনা সুদে ধার করিলেন এবং 12টি মাসিক কিস্তিতে সে ধার পরিশোধ করিলেন। কিস্তিগুলির প্রত্যেকটি অব্যবহিত পূর্ব কিস্তির দ্বিগুণ হইলে, প্রথম কিস্তি ও শেষ কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [B.U.B. Com.]

মনে কর, প্রথম কিস্তির পরিমাণ x টাকা এবং শেষ কিস্তির পরিমাণ y টাকা। প্রদত্ত সর্তানুসারে, মাসিক কিস্তিগুলির পরিমাণ গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

শ্রেণীটির প্রথম পদ x, সাধারণ অনুপাত 2.

$\therefore \quad 8190=12$ পদের সমষ্টি $=x.\frac{2^{12}-1}{2-1}=4095x$.

$$\therefore \quad x=\frac{8190}{4095}=2.$$

$y=$ দ্বাদশপদ $=x.2^{12-1}=2.2^{11}=4096$.

$\therefore$ প্রথম কিস্তির পরিমাণ $=2$ টাকা এবং শেষ কিস্তির পরিমাণ $=4096$ টাকা।

প্রশ্নমালা V (B)

1. (*a*) $16, -8, 4, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ শ্রেণীটির দশম ও ষোড়শ পদ নির্ণয় কর। ইহার সাধারণ পদ নির্ণয় কর।

(*b*) $e^{x}, e^{3x}, e^{5x}, \cdots\cdots$ শ্রেণীটির n-তম পদ নির্ণয় কর।

2. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^3}, \cdots\cdots$ শ্রেণীটির কোন্ পদ $-\frac{1}{512}$?

3. 526 কি $2, -8, 32, \cdots\cdots$ শ্রেণীটির একটি পদ ?

4. $625, -125, 25, \cdots\cdots(-\frac{1}{125})$ শ্রেণীটিতে কতগুলি পদ আছে ?

5. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 9 এবং $t_4 : t_8 = 3 : 2$ হইলে, উহার নবম পদটি কত ?

6. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 2 এবং দশম পদ 1 হইলে, শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত কত ?

7. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর একাদশ পদ 2 এবং সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{\sqrt{2}}$ হইলে, উহার প্রথম পদটি কি ?

8. কোন শ্রেণীর m-তম পদ $5\,2^{2m-3}$ হইলে, শ্রেণীটি লিখ। উহার পঞ্চম পদটি কত ? দেখাও যে, শ্রেণীটি গুণোত্তর শ্রেণী।

9. *a*) কোন গুণোত্তর শ্রেণীর পঞ্চম পদ 48 এবং নবম পদ 768 হইলে, শ্রেণীটি নির্ণয় কর। ইহার সপ্তম পদটি কত ?

(*b*) কোন গুণোত্তর শ্রেণীর $(p+q)$-তম পদ m এবং $(p-q)$-তম পদ n হইলে, উহার p-তম ও q-তম পদ নির্ণয় কর।

10. (*a*) একটি গুণোত্তর শ্রেণীর পঞ্চম পদ 96 এবং দ্বাদশ পদ 12288 হইলে, দেখাও যে, উহার প্রথম পদ 6 এবং অনুপাত **2.**

(*b*) একটি গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম এবং q-তম পদ যথাক্রমে c এবং d হইলে, শ্রেণীটির প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

11. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর তৃতীয় ও সপ্তম পদের সমষ্টি 68 এবং উহার পঞ্চম ও নবম পদের সমষ্টি 272 ; শ্রেণীটি নির্ণয় কর। উহার দশম পদটি কি ?

12. (*a*) দেখাও যে, কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম ও শেষ দিক হইতে সমদূরবর্তী দুই পদের গুণফল ধ্রুবক এবং ইহা প্রথম পদ ও শেষ পদের গুণফলের সমান।

(*b*) দেখাও যে, কোন গুণোত্তর শ্রেণীর কোন নির্দিষ্ট পদ হইতে সমদূরবর্তী দুইটি পদের গুণফল ঐ নির্দিষ্ট পদের বর্গের সমান।

13. গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর :

(*i*) 3 এবং 27. (*ii*) $-\frac{1}{3}$ ও $-\frac{1}{12}$.

14. (*a*) 2 ও 162-এর মধ্যে 3টি গুণোত্তরীয় মধ্যক স্থাপন কর।

(*b*) $\frac{32}{9}$ ও $\frac{81}{2}$-এর মধ্যে 5টি গুণোত্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন কর।

15. (*a*) দেখাও যে, a ও b-এর মধ্যে স্থাপিত n-সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যকের গুণফল $(ab)^{\frac{n}{2}}$.

(*b*) দুইটি প্রদত্ত রাশির মধ্যে একটি গুণোত্তরীয় মধ্যক G এবং দুইটি সমান্তরীয় মধ্যক p, q স্থাপিত করিলে, প্রমাণ কর যে, $G^2=(2p-q)(2q-p)$.

(*c*) দুইটি প্রদত্ত রাশির মধ্যে একটি সমান্তরীয় মধ্যক A এবং দুইটি গুণোত্তরীয় মধ্যক p, q স্থাপিত করিলে, দেখাও যে, $\frac{p^2}{q}+\frac{q^2}{p}=2A$.

(*d*) a, b, c গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত এবং a, b-এর সমান্তরীয় মধ্যক x ও b, c-এর সমান্তরীয় মধ্যক y হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{b}$ এবং $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$.

16. (*a*) সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $1+2+4+8+\cdots\cdots$ অষ্টম পদ পর্যন্ত।

(ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}+1+\sqrt{3}+\cdots\cdots$ 18-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(iii) $1-3+9-27+\cdots\cdots$ 20 সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(iv) $2+\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত।

(v) $\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{2}{3}}+1-\cdots\cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(vi) $2+6+18+\cdots\cdots+486$.

(vii) $64+32+16+\cdots\cdots+1$.

(viii) $\frac{5}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots\cdots$ দ্বাদশ পদ পর্যন্ত।

(*b*) সমষ্টির সূত্রের সাহায্য না লইয়া সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $6+12+24+\cdots\cdots+768$.

(ii) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots$ n পদ পর্যন্ত।

17. (*a*) একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 5, শেষ পদ 320 এবং পদ সমষ্টি 635 হইলে, শ্রেণীটির চতুর্থ পদ কত? [C. P. U.

(*b*) একটি গুণোত্তর শ্রেণীর পঞ্চম পদ 48 এবং দ্বাদশ পদ 6144. শ্রেণীটির প্রথম 10টি পদের সমষ্টি কত?

18. (*a*) 8, 4, 2, 1,...... শ্রেণীটির কতগুলি পদ লইলে উহাদের সমষ্টি $15\frac{31}{32}$ হইবে?

(*b*) একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম ছয় পদের সমষ্টি উহার প্রথম তিন পদের সমষ্টির নয় গুণ। সপ্তম পদ 384 হইলে, প্রথম দশ পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

19. (*a*) কোন শ্রেণীর প্রথম n-পদের সমষ্টি $2-\frac{1}{2^{n-1}}$ হইলে, শ্রেণীটি নির্ণয় কর। দেখাও যে, উহা একটি গুণোত্তর শ্রেণী। উহার ত্রয়োদশ পদটি নির্ণয় কর। শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত কত?

(*b*) 81, −27, 9, −3,...... শ্রেণীটির পঞ্চম পদ হইতে আরম্ভ করিয়া 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(*c*) সাধারণ অনুপাত 2 বিশিষ্ট একটি গুণোত্তর শ্রেণীর দশটি পদের সমষ্টি 3069; পরবর্তী পাঁচটি পদের সমষ্টি কত?

20. (*a*) n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর:

(i) $3+33+333+\cdots\cdots$

(ii) $4+44+444+\cdots\cdots$

(iii) $\cdot7+\cdot77+\cdot777+\cdots\cdots$

(iv) $\cdot9+\cdot99+\cdot999+\cdots\cdots$

(v) $1+(1+3)+(1+3+3^2)+(1+3+3^2+3^3)+\cdots\cdots$

(vi) $1+2.2+3.2^2+4.2^3+\cdots\cdots$

(vii) $1-\frac{4}{2}+\frac{7}{2^2}-\frac{10}{2^3}+\cdots\cdots$

(viii) $1+2a+3a^2+4a^3+\cdots\cdots$

(ix) $1+4+10+22+\cdots\cdots$

(x) $1+5+17+53+\cdots\cdots$

(*b*) সমষ্টি নির্ণয় কর:

(i) $\frac{4}{3}-1+\frac{3}{4}-\frac{9}{16}+\cdots$ $2n$ পদ পর্যন্ত।

(ii) $1+(2+2^2)+(2^3+2^4+2^5)+\cdots\cdots$ অষ্টম বিভাগের।

21. (*a*) যে-শ্রেণীর r-তম পদ $(2r+1)2^r$, উহার প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। [C. P. U.]

(b) যদি $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ হয়, n-এর সর্বনিম্নমান কত হইলে, $2-S_n<\frac{1}{100}$ হইবে ? [B. U. Ent.]

(c) n-এর সর্বনিম্নমান কত হইলে $1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}>1000$ হইবে ?

(d) $\frac{a+bx}{a-bx}=\frac{b+cx}{b-cx}=\frac{c+dx}{c-dx}$ হইলে,

দেখাও যে, a, b, c, d গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

22. (a) a, b, c, d গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে, দেখাও যে,

(i) $a+b, b+c, c+d$ গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

(ii) $a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-d^2$ গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

(iii) $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-d)^2$ গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

(iv) $(a+b)^2, (b+c)^2, (c+d)^2$ গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

(v) $\frac{1}{a^2+b^2}, \frac{1}{b^2+c^2}, \frac{1}{c^2+d^2}$ গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

(vi) $a^2+b^2+c^2, ab+bc+cd, b^2+c^2+d^2$ গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

(b) p, q, r গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে,

(i) $p^2q^2r^2\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{r^3}\right)=p^3+q^3+r^3.$

(ii) $p+r>2q$ (p, q, r সকলে ধনাত্মক)

(c) a, b, c, d গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে,

(i) $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2.$ [W.B.B.H.S.]

(ii) $(b+c)(b+d)=(c+a)(c+d).$

(iii) $(a^2+ac+c^2)(b^2+bd+d^2)=(ab+bc+cd)^2.$

(d) a, b, c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত এবং x, y, z গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^{b-c}.y^{c-a}.z^{a-b}=1.$ [W. B. B H. S.]

(e) যদি p, q, r সমান্তর শ্রেণীতে থাকে, তবে দেখাও যে, কোন গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম, q-তম, r-তম পদগুলি গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে।

(f) a, b, c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত এবং a, b, d গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে, দেখাও যে, $a, a-b, d-c$ গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকিবে।

23. (a) একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম n-পদের সমষ্টিকে s_1 দ্বারা, প্রথম $2n$-পদের সমষ্টিকে s_2 দ্বারা এবং প্রথম $3n$-পদের সমষ্টিকে s_3 দ্বারা সূচিত করিলে, প্রমাণ কর যে, $s_1(s_3-s_2)=(s_2-s_1)^2.$ [W. B. B. H. S.]

(*b*) একটি গুণোত্তর শ্রেণীর n-পদের সমষ্টি S, গুণফল P এবং পদগুলির অন্যোন্যকগুলির যোগফল R হইলে, প্রমাণ কর যে, $P^2=\left(\frac{S}{R}\right)^n$. [W.B.B.H.S.]

(*c*) একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, n-তম পদ l এবং প্রথম n-পদের গুণফল P হইলে, দেখাও যে, $P=(al)^{\frac{n}{2}}$.

24. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর তিনটি ক্রমিক সংখ্যাগুলি একটি সমান্তর শ্রেণীর যথাক্রমে প্রথম, অষ্টম এবং 22-তম পদ হইলে, গুণোত্তর শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ঐ সমান্তর শ্রেণীর প্রথম 22 সংখ্যক পদের সমষ্টি 275 হইলে, উহার প্রথম পদ বাহির কর। [W.B.B.H.S.]

25. (*a*) যদি তিনটি রাশি যুগপৎ সমান্তর ও গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, রাশিত্রয় পরস্পর সমান। [W.B.B.H.S]

(*b*) দুইটি রাশির সমান্তরীয় মধ্যক 15 এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক 9. রাশিগুলি কি কি ?

(*c*) দুইটি রাশির সমান্তরীয় মধ্যক : গুণোত্তরীয় মধ্যক = 5 : 3 হইলে, রাশি-দ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর।

26 (*a*) তিন সংখ্যাবিশিষ্ট একটি গুণোত্তর শ্রেণীর সংখ্যাত্রয়ের যোগফল 38 এবং গুণফল 1728 হইলে, সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

(*b*) গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত তিনটি সংখ্যার মধ্যসংখ্যা 6 এবং প্রথম ও দ্বিতীয় সংখ্যার সমষ্টি 15 হইলে সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

27. গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত তিনটি সংখ্যার গুণফল 512. প্রথম সংখ্যাটির সহিত 8 এবং দ্বিতীয় সংখ্যাটির সহিত 6 যোগ করিলে উৎপন্ন সংখ্যাদ্বয় এবং তৃতীয় সংখ্যাটি একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে। সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

28. গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত তিনটি সংখ্যার যোগফল 7 এবং সংখ্যাত্রয়ের বর্গের যোগফল 21. সংখ্যাগুলির ঘনের যোগফল কত ?

29. গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত চারিটি সংখ্যার গুণফল 4096 এবং মধ্যসংখ্যাদ্বয়ের যোগফল 20 ; সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

30. একটি বল 21 মিটার উঁচু একটি স্থান হইতে শক্ত মেঝের উপর পড়িলে, যদি প্রতিবার যতটা উঁচু হইতে পড়িয়াছে তাহার $\frac{2}{3}$ অংশ উচ্চে লাফাইয়া ওঠে, তাহা হইলে ষষ্ঠবার মেঝেতে আঘাত করিয়া বলটি মোট কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে ?

[নির্ণেয় দূরত্ব $=(21+2\times21\times\frac{2}{3}+2\times21\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\cdots$-ষষ্ঠ পদ পর্যন্ত) মিটার।]

31. একটি সরবরাহকারক প্রথম দিন 1টি, দ্বিতীয় দিন 2টি, তৃতীয় দিন 4টি, এইভাবে 30 দিনের এক মাস দিয়াশলাইএর কাঠি সরবরাহ করিবার জন্য দুইলক্ষ টাকার চুক্তি লয়। যদি 60 কাঠির একটি দিয়াশলাইএর বাক্সের দাম 12 পয়সা হয়, তবে তাহার কত লাভ বা ক্ষতি হইবে আসন্ন টাকায় নির্ণয় কর।

32. কোন ব্যক্তি বিনা সুদে 9841 টাকা ধার করিল এবং ঐ ঋণ 9টি মাসিক কিস্তিতে পরিশোধ করিল। দ্বিতীয়টি হইতে সুরু করিয়া প্রতিটি কিস্তি ইহার ঠিক পূর্বের কিস্তির তিনগুণ। শেষ কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [B U.B. Com.]

C. বিপরীত প্রগতি

5·15. **সংজ্ঞা ঃ** যদি কোন শ্রেণীর পদসমূহের অন্যোন্যকগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তবে ঐ শ্রেণীকে **বিপরীত শ্রেণী** বলা হয় এবং পদগুলি **বিপরীত প্রগতিতে** (Harmonical Progression বা সংক্ষেপে H.P.তে) আছে বলা হয়।

বিপরীতক্রমে, কোন সমান্তর শ্রেণীর পদসমূহের অন্যোন্যকগুলি একটি বিপরীত শ্রেণী গঠন করে। উদাহরণস্বরূপ, $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots\cdots$ একটি বিপরীত শ্রেণী ; কারণ, শ্রেণীটির পদসমূহের অন্যোন্যকগুলি $1, 3, 5, \cdots\cdots$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

সুতরাং a, b, c একটি বিপরীত শ্রেণী হইলে, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ একটি সমান্তর শ্রেণী হইবে, অর্থাৎ $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$, অর্থাৎ $\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$ হইবে।

ইহা হইতে নিম্নের সংজ্ঞাটি পাওয়া যায় ঃ

তিনটি রাশির প্রথম ও তৃতীয়ের অনুপাত যদি প্রথম ও দ্বিতীয় এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের অন্তরদ্বয়ের অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ রাশি তিনটি বিপরীত প্রগতিতে আছে বলা হয়।

তিনের অধিক রাশির প্রত্যেক তিনটি ক্রমিক রাশি যদি বিপরীত প্রগতিতে থাকে, তবে ঐ রাশিসমূহকে বিপরীত প্রগতিতে অবস্থিত বলে।

কোন বিপরীত শ্রেণীর সাধারণপদ বা t_n নির্ণয় করিতে হইলে, বিপরীত শ্রেণীটিকে প্রথমে সমান্তর শ্রেণীতে পরিবর্তিত করিয়া সমান্তর শ্রেণীটির t_n নির্ণয় করিতে হইবে। এই t_n-এর অন্যোন্যকই প্রদত্ত বিপরীত শ্রেণীটির সাধারণ পদ বা t_n হইবে।

বিপরীত শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করিবার কোন সূত্র নাই।

5·16. **বিপরীত মধ্যক ঃ** তিনটি রাশি বিপরীত শ্রেণীভুক্ত হইলে, মধ্যবর্তী রাশিটিকে অপর দুইটি রাশির **বিপরীত মধ্যক** (Harmonic Mean বা সংক্ষেপে H. M.) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ বিপরীত শ্রেণীভুক্ত তিনটি রাশি। এক্ষেত্রে $\frac{1}{6}$-কে $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{8}$-এর বিপরীত মধ্যক বলে। তিনটি রাশি a, H, b বিপরীত শ্রেণীভুক্ত হইলে, মধ্য-পদটিকে অর্থাৎ H-কে a ও b-এর বিপরীত মধ্যক বলে।

বিপরীতক্রমে, a ও b-এর বিপরীত মধ্যক H হইলে, a, H, b বিপরীত শ্রেণীভুক্ত হইবে অর্থাৎ

$\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে।

$\therefore \quad \frac{1}{H}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b} \quad \frac{1}{H}$ অর্থাৎ $\frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$. $\quad \therefore \quad H=\frac{2ab}{a+b}$.

n টি রাশি $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$-এর বিপরীত মধ্যক $=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$.

যদি কোন বিপরীত শ্রেণীতে তিনের অধিক পদ থাকে, তবে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যবর্তী পদগুলিকে প্রথম ও শেষ পদের বিপরীত মধ্যক বলে।

উদাহরণস্বরূপ, $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \frac{1}{17}$ এই বিপরীত শ্রেণীটির $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}$-কে $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{17}$-এর বিপরীত মধ্যক বলে। এক্ষেত্রে, $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{17}$-এর মধ্যে 4টি বিপরীত মধ্যক আছে।

সাধারণভাবে, যদি $a, H_1, H_2, \cdots H_n, b$ বিপরীত শ্রেণীভুক্ত হয়, তবে মধ্যবর্তী পদগুলি অর্থাৎ $H_1, H_2, \cdots H_n$-কে a ও b-এর n-সংখ্যক বিপরীত মধ্যক বলে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যে-কোন দুইটি নির্দিষ্ট রাশির মধ্যে n-সংখ্যক বিপরীত মধ্যক স্থাপন করা যায়।

মনে কর, প্রদত্তরাশি দুইটি a ও b এবং উহাদের মধ্যে n-সংখ্যক বিপরীত মধ্যক হইল $H_1, H_2, \cdots\cdots H_n$; তাহা হইলে $a, H_1, H_2, \cdots\cdots H_n, b$ একটি বিপরীত শ্রেণী অর্থাৎ $\frac{1}{a}, \frac{1}{H_1}, \frac{1}{H_2}, \cdots\cdots \frac{1}{H_n}, \frac{1}{b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী। এই সমান্তর শ্রেণীটিতে $(n+2)$-সংখ্যক পদ আছে যাহার প্রথম পদ $\frac{1}{a}$ এবং $(n+2)$-তম পদ $\frac{1}{b}$.

এই শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর d হইলে,

$$t_{n+2}=\frac{1}{a}+(n+2-1)d=\frac{1}{a}+(n+1)d=\frac{1}{b}.$$

$$\therefore \quad d=\frac{a-b}{(n+1)ab}.$$

$\therefore$ সমান্তরীয় মধ্যকগুলি হইল,

$$\frac{1}{a}+\frac{a-b}{(n+1)ab},\ \frac{1}{a}+\frac{2(a-b)}{(n+1)ab},\ldots\ldots\frac{1}{a}+\frac{n(a-b)}{(n+1)ab}.$$

নির্ণেয় বিপরীত মধ্যকগুলি এই সমান্তরীয় মধ্যকগুলির অন্যোন্যক হইবে, অর্থাৎ বিপরীত মধ্যকগুলি হইল $\dfrac{(n+1)ab}{a+nb},\ \dfrac{(n+1)ab}{2a+(n-1)b},\ldots\ldots\dfrac{(n+1)ab}{na+b}$.

5·17. সমান্তরীয়, গুণোত্তরীয় ও বিপরীত মধ্যকত্রয়ের পারস্পরিক সম্বন্ধ ঃ

মনে কর, দুইটি অসমান ধনাত্মক বাস্তব রাশি a ও b-এর সমান্তরীয়, গুণোত্তরীয় ও বিপরীত মধ্যকত্রয় যথাক্রমে A, G ও H.

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $\mathrm{A}=\frac{1}{2}(a+b)$, $\mathrm{G}=\sqrt{ab}$, $\mathrm{H}=\dfrac{2ab}{a+b}$.

$\therefore$ $\mathrm{A.H}=\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{2ab}{a+b}=ab=\mathrm{G}^2$.

$\therefore$ A ও H-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক G,

অর্থাৎ a ও b-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক A ও H-এরও গুণোত্তরীয় মধ্যক।

আবার, $\mathrm{A}-\mathrm{G}=\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$.

[$\because$ a ও b অসমান ও ধনাত্মক]

$\therefore$ A > G.

যেহেতু $\mathrm{AH}=\mathrm{G}^2$ এবং A > G, $\therefore$ H < G.

$\therefore$ A > G > H.

5·18. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. $2, 1\frac{1}{5}, \frac{6}{7}, \frac{2}{3},\ldots\ldots$ শ্রেণীটির সপ্তম পদ ও সাধারণ পদ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত শ্রেণীটির পদগুলির অন্যোন্যকগুলি অর্থাৎ $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2},\ldots\ldots$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত। সুতরাং, প্রদত্ত শ্রেণীটি একটি বিপরীত শ্রেণী।

$\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2},\ldots\ldots$ সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ $\frac{1}{2}$ এবং সাধারণ অন্তর $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.
সুতরাং সমান্তর শ্রেণীটির সপ্তম পদ $=\frac{1}{2}+(7-1).\frac{1}{3}=\frac{5}{2}$

এবং সাধারণ পদ বা $t_n=\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1}{3}=\frac{1}{6}(2n+1)$.

$\therefore$ প্রদত্ত বিপরীত শ্রেণীটির সপ্তম পদ $=\dfrac{2}{5}$ এবং সাধারণ পদ বা $t_n=\dfrac{6}{2n+1}$.

উদাহরণ 2. কোন বিপরীত শ্রেণীর চতুর্থ পদ $\frac{1}{5}$ এবং দশম পদ $\frac{1}{10}$ হইলে শ্রেণীটি নির্ণয় কর। শ্রেণীটির n-তম পদটি কত ?

মনে কর, অনুরূপ সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d. সমান্তর শ্রেণীটির চতুর্থপদ 5 এবং দশম পদ 10.

$$\therefore \quad 5=a+(4-1)d=a+3d$$

এবং $10=a+(10-1)d=a+9d.$

সমাধান করিয়া, $a=\frac{5}{2},\ d=\frac{5}{6}.$

$\therefore$ সমান্তর শ্রেণীটির n-তম পদ $=\frac{5}{2}+(n-1)\frac{5}{6}=\frac{5}{6}(n+2).$

$\therefore$ বিপরীত শ্রেণীটির n-তম পদ $=\dfrac{6}{5(n+2)}.$

সুতরাং শ্রেণীটি হইল $\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{6}{25}, \cdots\cdots$

উদাহরণ 3. 4 ও 5-এর মধ্যে দুইটি বিপরীত মধ্যক সংস্থাপন কর।

4 ও 5-এর মধ্যে দুইটি বিপরীত মধ্যক সংস্থাপন করিলে চারিটি পদ বিশিষ্ট একটি বিপরীত শ্রেণী পাওয়া যাইবে, যাহার প্রথম পদ $=4$ এবং চতুর্থ পদ $=5$. সুতরাং অনুরূপ সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ $=\frac{1}{4}$ এবং চতুর্থ পদ $=\frac{1}{5}$.

সমান্তর শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর d হইলে,

$$\tfrac{1}{5}=\tfrac{1}{4}+(4-1)d \text{ অর্থাৎ } d=-\tfrac{1}{60}.$$

সুতরাং অনুরূপ সমান্তরীয় মধ্যকগুলি হইল $\frac{1}{4}-\frac{1}{60}$ ও $\frac{1}{4}-2.\frac{1}{60}$

অর্থাৎ $\frac{7}{30}$ ও $\frac{13}{60}$.

অতএব নির্ণেয় বিপরীত মধ্যকগুলি হইল $\frac{30}{7}$ ও $\frac{60}{13}$ অর্থাৎ $4\frac{2}{7}$ ও $4\frac{8}{13}$.

উদাহরণ 4. a, b, c বিপরীত শ্রেণীভুক্ত হইলে, দেখাও যে,

$\dfrac{a}{b+c}, \dfrac{b}{c+a}, \dfrac{c}{a+b}$ বিপরীত শ্রেণীভুক্ত হইবে।

a, b, c বিপরীত শ্রেণীতে আছে বলিয়া, $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ সমান্তর শ্রেণীতে আছে।

$\therefore \dfrac{a+b+c}{a}, \dfrac{a+b+c}{b}, \dfrac{a+b+c}{c}$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

$\therefore \dfrac{a+b+c}{a}-1, \dfrac{a+b+c}{b}-1, \dfrac{a+b+c}{c}-1$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

$\therefore \dfrac{b+c}{a}, \dfrac{c+a}{b}, \dfrac{a+b}{c}$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত

অর্থাৎ $\dfrac{a}{b+c}, \dfrac{b}{c+a}, \dfrac{c}{a+b}$ বিপরীত শ্রেণীভুক্ত।

প্রশ্নমালা V(c)

1. $\frac{1}{5}, \frac{3}{13}, \frac{3}{11}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots$ শ্রেণীটির দ্বাদশ পদ ও সাধারণ পদ নির্ণয় কর।

2. $4, 4\frac{2}{7}, 4\frac{8}{13}, \cdots\cdots$ শ্রেণীটির কোন্ পদ 10 ?

3. একটি বিপরীত শ্রেণীর 13-তম পদ $\frac{3}{19}$ এবং 21-তম পদ $\frac{1}{9}$ হইলে, শ্রেণীটি নির্ণয় কর। ইহার n-তম পদ কত ?

4. একটি বিপরীত শ্রেণীর m-তম পদ n এবং n-তম পদ m হইলে, উহার p-তম পদটি কত ?

5. বিপরীত মধ্যক নির্ণয় কর :

(i) 4 ও 6.   (ii) $\frac{a}{b}$ ও $\frac{b}{a}$.

6. (*a*) 4 ও 2-এর মধ্যে 3টি বিপরীত মধ্যক স্থাপন কর।

(*b*) $\frac{1}{5}$ ও $\frac{1}{3}$-এর মধ্যে 5টি বিপরীত মধ্যক স্থাপন কর।

7. 1 ও 4-এর মধ্যে **11**টি বিপরীত মধ্যক থাকিলে, দেখাও যে,

প্রথম মধ্যক : শেষ মধ্যক $=1:3$.

8. (*a*) দুইটি সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যক : গুণোত্তরীয় মধ্যক $=5:4$. উহাদের গুণোত্তরীয় মধ্যক ও বিপরীত মধ্যকের সমষ্টি $10\frac{4}{5}$ হইলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

(*b*) y ও z-এর সমান্তরীয় মধ্যক x এবং x ও z-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক y হইলে, দেখাও যে, x ও y-এর বিপরীত মধ্যক z.

9. a, b, c বিপরীত শ্রেণীভুক্ত হইলে, দেখাও যে,

(i) $\frac{a}{b+c-a}, \frac{b}{c+a-b}, \frac{c}{a+b-c}$ পদ তিনটি বিপরীত শ্রেণীভুক্ত।

(ii) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}, \frac{1}{b}+\frac{1}{c+a}, \frac{1}{c}+\frac{1}{a+b}$ পদ তিনটি বিপরীত শ্রেণীভুক্ত।

(iii) $a:(a-b)=(a+c):(a-c)$.

10. প্রমাণ কর যে,

(*a*) a, b, c সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, bc, ca, ab বিপরীত শ্রেণীতে থাকিবে।

(*b*) a^2, b^2, c^2 সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, $b+c, c+a, a+b$ বিপরীত শ্রেণীতে থাকিবে।

(*c*) $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে,

$b-c, c-a, a-b$ বিপরীত শ্রেণীতে থাকিবে।

(*d*) a, b, c গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকিলে, $a+b, 2b, b+c$ বিপরীত শ্রেণীতে থাকিবে।

11. (*a*) a, b, c গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকিলে এবং $a^x = b^y = c^z$ হইলে, দেখাও যে, x, y, z বিপরীত শ্রেণীতে আছে।

(*b*) a, b, c সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে এবং p, q, r বিপরীত শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে,
$$\frac{a+c}{bq} = \frac{p+r}{pr}.$$

(*c*) a,b,c সমান্তর শ্রেণীতে এবং b,c,a বিপরীত শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে, c, a, b গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে।

12. (*a*) a, b, c, d সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে, $bcd, cda, dab,$ ও abc বিপরীত শ্রেণীতে আছে।

(*b*) a, b, c, d বিপরীত শ্রেণীতে থাকিলে, প্রমাণ কর যে, $ab + bc + cd = 3ad.$

13. a, b, c, d সমান্তর শ্রেণীতে, a, e, f, d গুণোত্তর শ্রেণীতে এবং a, g, h, d বিপরীত শ্রেণীতে থাকিলে, প্রমাণ কর যে,
$$ad = ef = bh = cg.$$

14. একটি বিপরীত শ্রেণীর p-তম, q-তম, r-তম পদ যথাক্রমে a, b, c হইলে, দেখাও যে, $bc(q-r) + ca(r-p) + ab(p-q) = 0.$

15. তিনটি ধনাত্মক রাশি a, b, c বিপরীত শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে,

(i) $a^2 + c^2 > 2b^2.$ (ii) $a^3 + c^3 > 2b^3.$

16. $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ বিপরীত শ্রেণীতে থাকিলে, প্রমাণ কর যে,
$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots\cdots + a_{n-1}a_n = (n-1)a_1a_n.$$

ষষ্ঠ অধ্যায়

দ্বিঘাত সমীকরণের তত্ত্ব

(Theory of Quadratic Equations)

6·1. দ্বিঘাত সমীকরণ ঃ

যে-সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটির দ্বিতীয় শক্তি বিশিষ্ট পদ থাকে (তদূর্ধ শক্তিবিশিষ্ট কোন পদ থাকে না) এবং পক্ষান্তর প্রণালীতে দ্বিঘাত অজ্ঞাত রাশিটি অপনীত হয় না, তাহাকে **দ্বিঘাত সমীকরণ** (Quadratic Equation) বলে।

সুতরাং একটি দ্বিঘাত সমীকরণে সাধারণভাবে সহগসহ দ্বিঘাতবিশিষ্ট অজ্ঞাত রাশি, একঘাতবিশিষ্ট অজ্ঞাত রাশি এবং শূন্যঘাতবিশিষ্ট অজ্ঞাত রাশি বা একটি ধ্রুবক থাকে। ইহাকে **মিশ্র** (adfected) দ্বিঘাত সমীকরণ বলে।

$2x^2-5x-3=0$ অথবা সাধারণভাবে $ax^2+bx+c=0$, (a, b, c ধ্রুবক) মিশ্রদ্বিঘাত সমীকরণের উদাহরণ।

কোন দ্বিঘাত সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটির একঘাত পদ অনুপস্থিত থাকিলে সমীকরণটিকে **অমিশ্র** (pure) দ্বিঘাত সমীকরণ বলে।

$2x^2-9=0$ অথবা সাধারণভাবে $px^2=q$, (p, q ধ্রুবক) অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের উদাহরণ।

দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষকে (ডানপক্ষে শূন্য আছে ধরিয়া) উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাইলে কিভাবে সমীকরণটির সমাধান করা যায়, তাহা পূর্বের শ্রেণীতে আলোচিত হইয়াছে। এখানে একটি উদাহরণের মাধ্যমে উহার পুনরালোচনা করা হইতেছে।

উদাহরণ ঃ সমাধান কর ঃ $2x^2-5x-3=0$.

$2x^2-5x-3=0$

অথবা, $2x^2-6x+x-3=0$

অথবা, $2x(x-3)+1(x-3)=0$

অথবা, $(x-3)(2x+1)=0$.

অতএব $x-3=0$, অর্থাৎ $x=3$

নতুবা, $2x+1=0$, অর্থাৎ $x=-\frac{1}{2}$.

$\therefore\ x=3, -\frac{1}{2}$.

দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষকে (ডানপক্ষে শূন্য আছে ধরিয়া) উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা না যাইলেও সমীকরণটিকে সমাধান করা যায়।

মনে কর, সাধারণভাবে সমীকরণটি $ax^2+bx+c=0$.

উহার উভয়পক্ষকে $4a$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

অথবা, $(2ax)^2+2.2ax.b+b^2=b^2-4ac$

অথবা, $(2ax+b)^2=b^2-4ac.$

বর্গমূল লইলে, $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}.$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

ইহাই দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের সাধারণ সূত্র। সমীকরণটির বামপক্ষকে (ডানপক্ষে শূন্য আছে ধরিয়া) উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাউক্ বা না যাউক্, সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব বা কাল্পনিক যাহাই হউক না কেন, এই সূত্রের সাহায্যে যে-কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ সর্বদা নির্ণয় করা যাইবে।

হিন্দু গণিতবিশেষজ্ঞ শ্রীধর আচার্য এই সূত্রের আবিষ্কারক; সেইজন্য এই সূত্রের নাম **শ্রীধর আচার্যের সূত্র**।

পূর্বে প্রদত্ত উদাহরণটি এই সূত্রের সাহায্যেও সমাধান করা যাইবে:

$2x^2-5x-3=0$ (এখানে $a=2,\ b=-5,\ c=-3$),

$$\therefore \quad x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.2.(-3)}}{2.2}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{5\pm7}{4}$$

$$=\frac{5+7}{4},\ \frac{5-7}{4}=3,\ -\tfrac{1}{2}.$$

এইভাবে একটি অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করা হয়।

দুই বা ততোধিক অজ্ঞাতরাশি বিশিষ্ট দুই বা ততোধিক সহ-দ্বিঘাত সমীকরণের (Simultaneous quadratic equations) সমাধানের জন্য পৃথক কোন নিয়ম নাই। সাধারণতঃ দুইটি অজ্ঞাতরাশি থাকিলে ও দুইটি সহ-সমীকরণ থাকিলে এবং উহাদের একটি একঘাত ও অপরটি দ্বিঘাত সহ-সমীকরণ হইলে, ঐ একঘাত সহ-সমীকরণটি হইতে একটি অজ্ঞাত রাশির মান অপর অজ্ঞাতরাশিটির মাধ্যমে প্রকাশ করিয়া সেই মান অন্য সমীকরণটিতে বসান হয়। ইহাতে শেষোক্ত সমীকরণটি একটি মাত্র অজ্ঞাত-রাশি যুক্ত দ্বিঘাত সমীকরণে রূপান্তরিত হয়। ইহা পূর্বের নিয়মে সমাধান করিলে ঐ

অজ্ঞাত রাশিটির মান পাওয়া যাইবে এবং সেই মান অপর অজ্ঞাত রাশিটির পূর্বের প্রাপ্ত মানে বসাইলে সমীকরণদ্বয়ের সমাধান শেষ হইবে।

একটি উদাহরণের মাধ্যমে ইহা দেখান হইল :

উদাহরণ : সমাধান কর : $x+y=15, xy=56.$

$x+y=15$

অথবা, $y=15-x \quad \cdots \quad (1)$

দ্বিতীয় সমীকরণে (1) বসাইলে, $x(15-x)=56$

অথবা, $x^2-15x+56=0$

অথবা, $(x-7)(x-8)=0$, অর্থাৎ $x=7, 8.$

$\therefore$ (1) হইতে, $y=15-7, 15-8=8, 7.$

$\therefore \quad x=7, y=8 \; ; \; x=8, y=7.$

কোন কোন ক্ষেত্রে কতিপয় বিকল্প পদ্ধতির সাহায্যেও সমীকরণ সমাধান সম্ভব। যেমন, পূর্বের উদাহরণটি নিম্নোক্ত নিয়মেও সমাধান করা যায় :

সূত্র হইতে, $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=15^2-4.56=225-224=1.$

$\therefore \quad x-y=\pm 1 \quad \cdots \quad (A)$

প্রদত্ত $\quad x+y=15 \quad \cdots \quad (B)$

সমীকরণ (A) ও (B) যোগ করিয়া, $2x=16, 14$ অর্থাৎ $x=8, 7.$

সমীকরণ (B) হইতে (A) বিয়োগ করিয়া, $2y=14, 16$ অর্থাৎ $y=7, 8.$

$\therefore \quad x=7, y=8 \; ; \; x=8, y=7.$

দুইটির অধিক অজ্ঞাতরাশি থাকিলে সব অজ্ঞাতরাশিগুলির মান সাধারণতঃ একটি অজ্ঞাত রাশির মাধ্যমে প্রকাশ করিয়া, সেই মানগুলিকে একটি সমীকরণে বসাইয়া সমীকরণগুলির সমাধান করা হয়।

টীকা : যে-কোন পদ্ধতিতেই সমীকরণের সমাধান হউক না কেন, সমীকরণের অজ্ঞাত রাশিটির বা রাশিগুলির যে-সমস্ত মান (বীজ) পাওয়া যায় তাহাদের দ্বারা সমীকরণগুলি যুগপৎ সিদ্ধ হয় কিনা তাহা পরীক্ষা করিয়া সমাধানের সঠিকতা সম্বন্ধে ছাত্রদের নিঃসন্দেহ হওয়া উচিত। যদি প্রাপ্ত কোন মান সমীকরণকে সিদ্ধ না করে, সেই মানকে বাদ দিতে হইবে। এরূপ মানকে **স্বতন্ত্র বীজ** (Extraneous root) বলে।

6·2. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজের সংখ্যা ঃ

উপপাদ্য 1. দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি এবং কেবলমাত্র দুইটি বীজ থাকে।

দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$.

এক্ষণে, $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right\}$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

সুতরাং কেবলমাত্র x-এর দুইটি মানের জন্য (ax^2+bx+c)-এর ডানপক্ষ 0 হইবে এবং এই দুইটি মান হইবে $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

এই দুইটি মান ব্যতীত x-এর অন্য কোন মান দ্বারা কোন উৎপাদকই শূন্য হইবে না অর্থাৎ ax^2+bx+c-এর মান শূন্য হইবে না।

সুতরাং কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি এবং কেবলমাত্র দুইটি বীজ থাকিবে।

উপপাদ্য 2. দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির অধিক বীজ থাকিতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির তিনটি বিভিন্ন বীজ α, β এবং γ ; তাহা হইলে উহাদের প্রত্যেকটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে

অর্থাৎ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ ... (1)

$a\beta^2+b\beta+c=0$ ... (2)

$a\gamma^2+b\gamma+c=0$ ... (3)

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে, $a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0$

অথবা, $(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0.$

এখন, α এবং β বিভিন্ন বা অসমান বলিয়া, $(\alpha-\beta)\neq 0.$

$\therefore$ $(\alpha-\beta)$ দ্বারা ভাগ করিলে, $a(\alpha+\beta)+b=0$ ... (4)

অনুরূপভাবে, (1) ও (3) হইতে, $a(\alpha+\gamma)+b=0$ ... (5)

(4) হইতে (5) বিয়োগ করিলে, $a(\beta-\gamma)=0$ ... (6)

$\therefore$ $a=0$, নতুবা $\beta-\gamma=0$, কিন্তু ইহা অসম্ভব ; কারণ $a=0$ হইলে সমীকরণটি দ্বিঘাতবিশিষ্ট হইবে না। আবার, β ও γ বিভিন্ন বা অসমান বলিয়া $\beta-\gamma=0$ হইতে পারে না।

সুতরাং কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির অধিক বিভিন্ন বীজ থাকিতে পারে না।

টীকা ঃ যদি কোন দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$, অজ্ঞাত রাশি x-এর তিনটি বিভিন্ন মান দ্বারা সিদ্ধ হয়, তাহা হইলে $\beta \neq \gamma$ বলিয়া, (6) হইতে, $a=0$.

সুতরাং (5) হইতে, $b=0$.

অতএব (3) হইতে, $c=0$.

সুতরাং সমীকরণটি $0.x^2+0.x+0=0$ আকারে রূপান্তরিত হয়। ইহা একটি **অভেদ**(Identity); কারণ, অজ্ঞাত রাশি x-এর যে-কোন মান দ্বারা উহা সিদ্ধ হয়।

অতএব কোন দ্বিঘাত সমীকরণ যদি অজ্ঞাতরাশিটির দুইটির অধিক বিভিন্ন মান দ্বারা সিদ্ধ হয়, তাহা হইলে উহা একটি অভেদ, সমীকরণ নহে।

6·3. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি ঃ

কোন দ্বিঘাত সমীকরণকে সমাধান না করিয়া উহার বীজদ্বয়ের স্বভাব বা প্রকৃতি নিরূপণ করা যায়। বীজদ্বয়ের প্রকৃতি সম্বন্ধে আলোচনা করিতে হইলে মনে রাখিতে হইবে যে, রাশি দুই প্রকার, বাস্তব (real) ও কাল্পনিক (imaginary)।

উদাহরণস্বরূপ, $2, -3, \sqrt{2}$, ইত্যাদি বাস্তব রাশি এবং $\sqrt{-2}, \sqrt{-3}$, ইত্যাদি কল্পিত রাশি। আবার, বাস্তব রাশি দুই প্রকার, মূলদ (rational) এবং অমূলদ (irrational)। উদাহরণস্বরূপ, $2, -3$, ইত্যাদি, মূলদ রাশি এবং $\sqrt{2}, -\sqrt{3}$, ইত্যাদি অমূলদ রাশি।

$ax^2+bx+c=0$ (a, b, c বাস্তব রাশি) দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয় যথাক্রমে

$$\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

উভয় বীজের মধ্যে b^2-4ac রাশিমালাটি অবস্থিত এবং সমীকরণ সমাধান না করিয়া উহার দ্বারা বীজদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় করা যায়। সেইজন্য উহাকে দ্বিঘাত সমীকরণটির **নিরূপক** (discriminant) বলে।

নিরূপকের প্রকৃতি আলোচনা করিলে বীজদ্বয় সম্বন্ধে নিম্নের তত্ত্বগুলি পাওয়া যায় ঃ

(i) নিরূপক b^2-4ac **ধনাত্মক** হইলে, অর্থাৎ $b^2>4ac$ হইলে,

$\sqrt{b^2-4ac}$-এর মান বাস্তব হইবে এবং বীজদ্বয় **বাস্তব ও অসমান** হইবে।

যদি b^2-4ac **ধনাত্মক কিন্তু পূর্ণবর্গ না হয়**, তাহা হইলে বীজদ্বয় **বাস্তব**, **অমূলদ** ও **অসমান** হইবে।

b^2-4ac **পূর্ণবর্গ ধনরাশি** হইলে এবং a, b, c মূলদ হইলে, বীজদ্বয় **বাস্তব**, **মূলদ** ও **অসমান** হইবে। কিন্তু a বা b-এর যে-কোন একটি অমূলদ হইলে, b^2-4ac পূর্ণবর্গ হওয়া সত্ত্বেও বীজ দুইটি অমূলদ হইবে।

স্থতরাং, মূলদ সহগ-বিশিষ্ট কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের একটি মূলদ এবং অপরটি অমূলদ হইতে পারে না।

(ii) নিরূপক b^2-4ac **শূন্য** মানের হইলে অর্থাৎ $b^2=4ac$ হইলে, বীজদ্বয় **বাস্তব, মূলদ** ও **সমান** হইবে, এবং উহারা প্রত্যেকে $\left(-\frac{b}{2a}\right)$-এর সমান হইবে।

স্থতরাং বীজদ্বয় বাস্তব হইবে, যদি $b^2-4ac\geqslant 0$ হয়, অর্থাৎ $b^2-4ac \nless 0$.

(iii) নিরূপক b^2-4ac **ঋণাত্মক** হইলে, অর্থাৎ $b^2<4ac$ হইলে, $\sqrt{b^2-4ac}$-এর মান কাল্পনিক হইবে এবং বীজদ্বয় **কাল্পনিক** ও **অসমান** হইবে।

স্থতরাং বাস্তব সহগ-বিশিষ্ট কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের একটি বাস্তব এবং অপরটি কাল্পনিক হইতে পারে না।

6·4. দ্বিঘাত সমীকরণের এক বা একাধিক সহগ শূন্য হইলে বীজদ্বয়ের প্রকৃতি ঃ

মনে কর, দ্বিঘাত সমীকরণটি হইল $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c ধ্রুবক)।

(i) $a=0$ হইলে, সমীকরণটি হয় $bx+c=0$ অর্থাৎ $x=-\frac{c}{b}$.

স্থতরাং দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি বীজ $-\frac{c}{b}$.

অপর বীজটি নির্ণয় করিবার জন্য মনে কর, $x=\frac{1}{y}$; তাহা হইলে সমীকরণটি হয়

$$a.\frac{1}{y^2}+b.\frac{1}{y}+c=0$$

অথবা, $cy^2+by+a=0$

অথবা, $cy^2+by=0$ ($\because a=0$)

অথবা, $y(cy+b)=0$, অর্থাৎ $y=0, -\frac{b}{c}$.

স্থতরাং কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দ্বিঘাত পদের সহগ শূন্য হইলে, ঐ সমীকরণের একটি বীজ অসীম হইবে।

(ii) $b=0$ হইলে, সমীকরণটি হয় $ax^2+c=0$ অর্থাৎ $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

স্থতরাং কোন দ্বিঘাত সমীকরণের x-এর সহগ শূন্য হইলে বীজদ্বয় সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে। আবার, a ও c একই চিহ্নযুক্ত হইলে, বীজদ্বয় কাল্পনিক হইবে এবং a ও c বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইলে, বীজদ্বয় বাস্তব হইবে।

(iii) $c=0$ হইলে, সমীকরণটি হয় $ax^2+bx=0$ অর্থাৎ $x=0, -\frac{b}{a}$.

সুতরাং কোন দ্বিঘাত সমীকরণের ধ্রুবক পদ বা x-বর্জিত পদ শূন্য হইলে, ঐ সমীকরণের বীজদ্বয়ের একটি শূন্য হইবে।

(iv) $a=0$ এবং $b=0$ হইলে, (i)-এর ন্যায় $x=\frac{1}{y}$ ধরিলে সমীকরণটি হইবে,

$cy^2+by+a=0$, অর্থাৎ $cy^2=0$ ($\because$ $a=0, b=0$)

$\therefore$ $y=0,0$.

সুতরাং কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দ্বিঘাত ও একঘাত পদের সহগদ্বয়ের উভয়েই শূন্য হইলে, উভয় বীজই অসীম হইবে।

(v) $a=0$ এবং $c=0$ হইলে, সমীকরণটির একটি বীজ শূন্য হইবে এবং অপরটি অসীম হইবে।

(vi) $b=0$ এবং $c=0$ হইলে, সমীকরণটির উভয় বীজই শূন্য হইবে।

(vii) $a=0, b=0, c=0$ হইলে, সমীকরণটি হইবে $0.x^2+0.x+0=0$ যাহা x-এর যে-কোন সসীম মান দ্বারা সিদ্ধ হয়, অর্থাৎ সমীকরণটি একটি অভেদ হইয়া পড়ে।

6·5. অনুবন্ধী-বীজ ঃ

উপপাদ্য 1. মূলদ সহগ-বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ অমূলদ হইলে, অপর বীজটি ঐ বীজের অনুবন্ধী অমূলদ হইবে ;

অর্থাৎ, $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c মূলদ) দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি বীজ $\alpha+\sqrt{\beta}$ হইলে, ইহার অপর বীজটি হইবে $\alpha-\sqrt{\beta}$.

$ax^2+bx+c=0$ (a, b, c মূলদ) দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি বীজ $\alpha+\sqrt{\beta}$ হইলে, এই বীজ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$\therefore$ $a(\alpha+\sqrt{\beta})^2+b(\alpha+\sqrt{\beta})+c=0$

অথবা, $(a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c)+\sqrt{\beta}\,2a\alpha+b)=0$.

বামপক্ষের মূলদ ও অমূলদ রাশি দুইটির সমষ্টি শূন্য।

সুতরাং উহাদের প্রত্যেকটি শূন্য হইবে

অর্থাৎ $a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c=0$ এবং $2a\alpha+b=0$. ... (1)

এক্ষণে, ax^2+bx+c রাশিতে x-এর মান $\alpha-\sqrt{\beta}$ বসাইলে,

$a(\alpha-\sqrt{\beta})^2+b(\alpha-\sqrt{\beta})+c$

$=(a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c)-\sqrt{\beta}(2a\alpha+b)=0$ [(1) হইতে]

$\therefore \quad ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির $(\alpha-\sqrt{\beta})$ ও একটি বীজ ;
অর্থাৎ, $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির $\alpha+\sqrt{\beta}$ একটি বীজ হইলে, অপর বীজটি হইবে $\alpha-\sqrt{\beta}$.

টীকা : অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $ax^2+bx+c=0$ $(a, b, c,$ মূলদ$)$ দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি বীজ $\alpha-\sqrt{\beta}$ হইলে, ইহার অপর বীজটি হইবে $\alpha+\sqrt{\beta}$.

উপপাদ্য 2. বাস্তব সহগ-বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকণের একটি বীজ কাল্পনিক হইলে, অপর বীজটি ঐ বীজের অনুবন্ধী কাল্পনিক হইবে ;
অর্থাৎ $ax^2+bx+c=0$ $(a, \; b, \; c$ বাস্তব $)$ দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি বীজ $\alpha+i\beta$ হইলে, ইহার অপর বীজটি হইবে $\alpha-i\beta$.

$ax^2+bx+c=0$ $(a, b, c$ বাস্তব$)$ দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি বীজ $\alpha+i\beta$ হইলে, এই বীজ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$\therefore \quad a(\alpha+i\beta)^2+b(\alpha+i\beta)+c=0$

অথবা, $(a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c)+i(2a\alpha+b)\beta=0.$

বামপক্ষের বাস্তব ও কাল্পনিক রাশি দুইটির সমষ্টি শূন্য ; সুতরাং উহাদের প্রত্যেকটি শূন্য হইবে।

$\therefore \quad a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c=0$ এবং $(2a\alpha+b)\beta=0 \qquad \cdots \qquad (1)$

এক্ষণে, ax^2+bx+c রাশিতে x-এর মান $\alpha-i\beta$ বসাইলে,

$a(\alpha-i\beta)^2+b(\alpha-i\beta)+c$

$=(a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c)-i(2a\alpha b+)\beta=0 \qquad$ [(1) হইতে]

$\therefore \quad ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির $(\alpha-i\beta)$ও একটি বীজ ;
অর্থাৎ $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির $\alpha+i\beta$ একটি বীজ হইলে, অপর বীজটি হইবে $\alpha-i\beta$.

টীকা : অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $ax^2+bx+c=0$ $(a, b, c$ বাস্তব$)$ দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি বীজ $\alpha-i\beta$ হইলে, ইহার অপর বীজটি হইবে $\alpha+i\beta$.

6·6. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সহিত সহগগুলির সম্বন্ধ :

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$
দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজ দুইটি α ও β.

সমীকরণটি সমাধান করিয়া পাওয়া যায়, $x=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$

সুতরাং ধরা যায়, $\alpha=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $\beta=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$\therefore\ \alpha+\beta=2\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha.\beta=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$.

$\therefore$ **বীজদ্বয়ের সমষ্টি** $=-\frac{b}{a}=-\frac{x\text{-এর সহগ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$.

এবং **বীজদ্বয়ের গুণফল** $=\frac{c}{a}=\frac{x\text{-বর্জিত পদ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $ax^2+bx+c=0$ আকারের সমীকরণকে x^2-এর সহগ a দ্বারা ভাগ করিয়া $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ আকারে প্রকাশ করিলে, অর্থাৎ কোন দ্বিঘাত সমীকরণে x^2-এর সহগ 1 হইলে, পরিবর্তিত চিহ্নযুক্ত x-এর সহগ বীজদ্বয়ের সমষ্টি এবং x-বর্জিত পদটি বীজদ্বয়ের গুণফল হইবে।

$x^2-px+q=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হইলে,
$\alpha+\beta=p$ এবং $\alpha\beta=q$ হইবে।

টীকা ঃ বীজদ্বয়ের গুণফল 1 হইলে, বীজদ্বয়ের একটি অপরটির অন্যোন্যক হইবে। সুতরাং $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ অন্যোন্যক হইবে যদি বীজ দুইটির গুণফল $\frac{c}{a}=1$ হয়, অর্থাৎ যদি $a=c$ হয়, অর্থাৎ যদি x^2-এর সহগ ও x-বর্জিত পদ পরস্পর সমান হয়।

6·7. প্রদত্ত বীজদ্বয় হইতে দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন ঃ

মনে কর, কোন দ্বিঘাত সমীকরণের প্রদত্ত বীজদ্বয় α, β এবং নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $x^2+px+q=0$.

$\therefore\ \alpha+\beta=-p$ এবং $\alpha\beta=q$ অর্থাৎ $p=-(\alpha+\beta)$ এবং $q=\alpha\beta$.

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণটি হইল $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

অর্থাৎ $x^2-($ **বীজদ্বয়ের সমষ্টি** $)x+$ **বীজদ্বয়ের গুণফল** $=0$.

বিকল্প পদ্ধতি ঃ α ও β বীজদ্বয় বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণটি হইল

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

অথবা, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.$

6·8. দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ বীজ থাকিবার শর্ত ঃ

(i) একটি বীজ সাধারণ হইবার শর্ত এবং অপরটি নির্ণয় প্রণালী

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ এবং $a'x^2+b'x+c'=0$ দুইটি প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণ এবং α ইহাদের একটি সাধারণ বীজ; তাহা হইলে $x=\alpha$ দুইটি সমীকরণকেই সিদ্ধ করিবে।

$$\therefore \quad a\alpha^2+b\alpha+c=0,$$
$$a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0.$$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে,

$$\frac{\alpha^2}{bc'-b'c}=\frac{\alpha}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}.$$

$$\therefore \quad \alpha^2=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b} \text{ ও } \alpha=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}.$$

α অপনয়ন করিলে, $\left(\dfrac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right)^2=\dfrac{bc'-b'c}{ab'-a'b}$

অথবা, $\mathbf{(bc'-b'c)(ab'-a'b)=(ca'-c'a)^2}$.

ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

সাধারণ বীজটি হইল $\alpha=\dfrac{bc'-b'c}{ca'-c'a}$ অথবা, $\dfrac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$.

প্রথম সমীকরণটির অপর বীজটি β হইলে, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$.

$$\therefore \quad \beta=\frac{c}{a\alpha}=\frac{c(ca'-c'a)}{a(bc'-b'c)} \text{ অথবা } \frac{c(ab'-a'b)}{a\,ca'-c'a)}.$$

অনুরূপভাবে, দ্বিতীয় সমীকরণটির অপর বীজটি γ হইলে, $\alpha\gamma=\dfrac{c'}{a'}$.

$$\therefore \quad \gamma=\frac{c'}{a'\alpha}=\frac{c'(ca'-c'a)}{a'(bc'-b'c)} \text{ অথবা } \frac{c'(ab'-a'b)}{a'(ca'-c'a)}.$$

(ii) উভয় বীজ সাধারণ হইবার শর্ত

মনে কর, সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ বীজ দুইটি হইল α ও β.

$\therefore$ প্রথম সমীকরণের ক্ষেত্রে, $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

এবং দ্বিতীয় সমীকরণের ক্ষেত্রে, $\alpha+\beta=-\dfrac{b'}{a'}$ এবং $\alpha\beta=\dfrac{c'}{a'}$.

$$\therefore \quad -\frac{b}{a}=-\frac{b'}{a'} \text{ এবং } \frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$$

$$\text{অর্থাৎ} \quad \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

অর্থাৎ সমীকরণ দুইটি একই, কেবলমাত্র উহাদের আকার ভিন্ন। ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

6·9. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. দেখাও যে,

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2, \text{ একটি অভেদ।}$$

প্রদত্ত সমীকরণটি x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ এবং উহা x-এর তিনটি বিভিন্ন মান $x=a$, $x=b$ এবং $x=c$ দ্বারা সিদ্ধ হয়। সুতরাং উহা x-এর যে-কোন মান দ্বারা সিদ্ধ হইবে। অতএব উহা একটি অভেদ, সমীকরণ নহে।

উদাহরণ 2. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির বীজের প্রকৃতি নিরূপণ কর ঃ

(i) $9x^2+12x+4=0$. (ii) $x^2-2\sqrt{7}x=2$. (iii) $x^2-x+1=0$.

(i) নিরূপক $=(12)^2-4.9.4=144-144=0$;

এবং সমীকরণটির x^2-ও x-এর সহগগুলি মূলদ বলিয়া বীজদ্বয় বাস্তব, মূলদ ও সমান।

(ii) প্রদত্ত সমীকরণটি হইল $x^2-2\sqrt{7}x-2=0$.

নিরূপক $=(-2\sqrt{7})^2-4.1(-2)=28+8=36=6^2$, যাহা একটি পূর্ণবর্গ ধনরাশি ; এবং সমীকরণটির x-এর সহগ $(-2\sqrt{7})$ বাস্তব ও অমূলদ বলিয়া বীজদ্বয় বাস্তব, অমূলদ ও অসমান।

(iii) প্রদত্ত সমীকরণটির নিরূপক $=(-1)^2-4.1.1=1-4=-3$, যাহা একটি ঋণরাশি।

$\therefore$ বীজদ্বয় কাল্পনিক ও অসমান।

উদাহরণ 3. $2x^2+3x+3=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α, β হইলে, $\alpha^3\beta^5+\alpha^5\beta^3$-এর মান নির্ণয় কর। [C.P.U.]

$2x^2+3x+3=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β বলিয়া,

$$\alpha+\beta=-\tfrac{3}{2} \text{ এবং } \alpha\beta=\tfrac{3}{2}.$$

এখন, $\alpha^3\beta^5+\alpha^5\beta^3=\alpha^3\beta^3(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha\beta)^3\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$

$$=(\tfrac{3}{2})^3\{(-\tfrac{3}{2})^2-2.\tfrac{3}{2}\}=\tfrac{27}{8}(\tfrac{9}{4}-3)=\tfrac{27}{8}(-\tfrac{3}{4})=-\tfrac{81}{32}.$$

টীকা : দুই রাশি যুক্ত যে-রাশিমালায় রাশিদ্বয়ের পারস্পরিক পরিবর্তনে রাশিমালাটি অপরিবর্তিত থাকে তাহাকে ঐ রাশিদ্বয়ের **প্রতিসম** (symmetrical) রাশিমালা বলে। যেমন, $\alpha^3\beta^5+\alpha^5\beta^3$ রাশিমালাটি α ও β রাশির সাপেক্ষে প্রতিসম।

এ সম্বন্ধে 6·10 অনুচ্ছেদে বিস্তারিত আলোচনা হইয়াছে।

উদাহরণ 4. $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=\frac{p^3}{q^3}-\frac{3p}{q^2}.$$ [C.P.U.]

$\because$ $x^2-px+q=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β,

$\therefore$ $\alpha+\beta=-\dfrac{(-p)}{1}=p$ এবং $\alpha\beta=\dfrac{q}{1}=q$.

এখন, $$\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}=\frac{p^3-3q.p}{q^3}$$

$$=\frac{p^3}{q^3}-\frac{3p}{q^2}.$$

উদাহরণ 5. মূলদ সহগ বিশিষ্ট এরূপ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন কর যাহার একটি বীজ $(1+\sqrt{2})$।

নির্ণেয় সমীকরণটির সহগগুলি মূলদ এবং একটি বীজ $(1+\sqrt{2})$, যাহা অমূলদ।

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণটির অপর বীজটি উহার অনুবন্ধী অমূলদ রাশি $(1-\sqrt{2})$ হইবে।

এখন, বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=(1)^2-(\sqrt{2})^2=1-2=-1.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$x^2-($ বীজদ্বয়ের সমষ্টি $)\,x+($ বীজদ্বয়ের গুণফল $)=0$

অথবা, $x^2-2x-1=0.$

টীকা : বীজটি ($\sqrt{2}+1$, আকারে ধরিলে অপর বীজটি হয় $\sqrt{2}-1$.

সেক্ষেত্রে, বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=2\sqrt{2}$ এবং গুণফল $=2-1=1.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $x^2-2\sqrt{2}\,x+1=0.$

উদাহরণ 6. $ax^2-bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α, β হইলে, এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজদ্বয় হইবে $\alpha+\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ এবং $\beta+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$. [W.B.B H.S.]

α ও β প্রদত্ত সমীকরণ $ax^2-bx+c=0$-এর দুইটি বীজ বলিয়া,

$$\alpha+\beta=\frac{b}{a} \text{ এবং } \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=\left(\alpha+\frac{\alpha^2}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{\beta^2}{\alpha}\right)=\alpha+\beta+\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$$=\alpha+\beta+\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{b}{a}+\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^3-3\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{b}{a}+\frac{b^3-3abc}{a^2c}$$

$$=\frac{abc+b^3-3abc}{a^2c}=\frac{b^3-2abc}{a^2c}$$

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $=\left(\alpha+\frac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{\beta^2}{\alpha}\right)=2\alpha\beta+\alpha^2+\beta^2$

$$=(\alpha+\beta)^2=\frac{b^2}{a^2}.$$

∴ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$x^2-\frac{b^3-2abc}{a^2c}x+\frac{b^2}{a^2}=0$$

অথবা, $a^2cx^2-(b^3-2abc)x+b^2c=0.$

উদাহরণ 7. কোন্ শর্তে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির একটি বীজ অপরটির p-গুণ হইবে? [W.B.B.H.S.]

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি বীজ α এবং অপরটি $p\alpha$.

$$\therefore \text{ বীজদ্বয়ের যোগফল}=\alpha+p\alpha=-\frac{b}{a} \quad \cdots \quad (1)$$

$$\text{এবং বীজদ্বয়ের গুণফল}=\alpha.p\alpha=\frac{c}{a} \quad \cdots \quad (2)$$

$$(1) \text{ হইতে, } \alpha=-\frac{b}{a(p+1)} \quad \cdots \quad (3)$$

$$\text{এবং (2) হইতে, } \alpha^2=\frac{c}{ap} \quad \cdots \quad (4)$$

(3) হইতে (4)-এ বসাইলে,

$$\left\{-\frac{b}{a(p+1)}\right\}^2=\frac{c}{ap}, \text{ অর্থাৎ } \frac{b^2}{a^2(p+1)^2}=\frac{c}{ap}$$

অথবা, $ac\,(p+1)^2=pb^2.$

ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

উদাহরণ 8. $px^2+qx+r=0$ সমীকরণটির একটি বীজ অপরটির বর্গের সমান হইলে, প্রমাণ কর যে, $q^3+p^2r+pr^2=3pqr$. [W.B.B.H.S.]

মনে কর, $px^2+qx+r=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি বীজ α

সুতরাং প্রদত্ত শর্তানুসারে সমীকরণটির অপর বীজটি হইল α^2.

$\therefore$ বীজদ্বয়ের যোগফল $=\alpha+\alpha^2=-\dfrac{q}{p}$ ... (1)

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $=\alpha.\alpha^2=\alpha^3=\dfrac{r}{p}$ ... (2)

(1)-এর উভয়পক্ষকে ঘন করিলে, $(\alpha^2+\alpha)^3=\left(-\dfrac{q}{p}\right)^3$

অথবা, $\alpha^6+\alpha^3+3\alpha^2.\alpha(\alpha^2+\alpha)=-\dfrac{q^3}{p^3}$

অথবা, $(\alpha^3)^2+\alpha^3+3\alpha^3\left(-\dfrac{q}{p}\right)=-\dfrac{q^3}{p^3}$ [(1) হইতে]

অথবা, $\dfrac{r^2}{p^2}+\dfrac{r}{p}-\dfrac{3qr}{p^2}+\dfrac{q^3}{p^3}=0$ [(2)-এর সাহায্যে]

অথবা, $\dfrac{q^3+p^2r+pr^2}{p^3}=\dfrac{3qr}{p^2}$ অর্থাৎ, $q^3+p^2r+pr^2=3pqr$.

উদাহরণ 9. $lx^2+nx+n=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় $p:q$ অনুপাতে থাকিলে, দেখাও যে, $\sqrt{\dfrac{p}{q}}+\sqrt{\dfrac{q}{p}}+\sqrt{\dfrac{n}{l}}=0$. [B.U.Ent.]

যেহেতু $lx^2+nx+n=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয় $p:q$ অনুপাতে আছে, মনে কর, সমীকরণটির বীজদ্বয় হইল $p\alpha$ ও $q\alpha$.

$\therefore$ বীজদ্বয়ের যোগফল $=p\alpha+q\alpha=(p+q)\alpha=-\dfrac{n}{l}$ ... (1)

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $=p\alpha.q\alpha=pq\alpha^2=\dfrac{n}{l}$.

$$\therefore \sqrt{pq}.\alpha=\sqrt{\frac{n}{l}} \quad \cdots \quad (2)$$

$\because$ $\alpha\neq0$, (1)-কে (2) দ্বারা ভাগ করিলে, $\dfrac{p+q}{\sqrt{pq}}=\dfrac{-\dfrac{n}{l}}{\sqrt{\dfrac{n}{l}}}$

অথবা, $\dfrac{p}{\sqrt{pq}}+\dfrac{q}{\sqrt{rq}}=-\sqrt{\dfrac{n}{l}}$ অর্থাৎ, $\sqrt{\dfrac{p}{q}}+\sqrt{\dfrac{q}{p}}+\sqrt{\dfrac{n}{l}}=0$.

উদাহরণ 10. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে, দেখাও যে, $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$ সমীকরণের একটি বীজ হইবে $\frac{\alpha}{\beta}$.

এখানে, $\alpha+\beta=-p$ এবং $\alpha\beta=q$.

এক্ষণে, $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$

অথবা, $x^2-\frac{p^2-2q}{q}x+1=0$

অথবা, $x^2-\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}x+1=0$

অথবা, $x^2-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}x+1=0$

অথবা, $x^2-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)x+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=0$

অথবা, $\left(x-\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(x-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0.$

$\therefore$ $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি বীজ $\frac{\alpha}{\beta}$.

উদাহরণ 11. m-এর মান কত হইলে $3x^2+4mx+2=0$ এবং $2x^2+3x-2=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিবে? [W.B.B.H.S.]

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ বীজটি হইল α.

$\therefore$ α উভয় সমীকরণকেই সিদ্ধ করিবে।

সুতরাং, $3\alpha^2+4m\alpha+2=0$ ... (1)

এবং $2\alpha^2+3\alpha-2=0$ ... (2)

(1) ও (2) হইতে, বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে,

$$\frac{\alpha^2}{-8m-6}=\frac{\alpha}{4+6}=\frac{1}{9-8m}. \quad \therefore \alpha^2=\frac{8m+6}{8m-9} \text{ ও } \alpha=-\frac{10}{8m-9}.$$

α অপনয়ন করিলে, $\left(-\frac{10}{8m-9}\right)^2=\frac{8m+6}{8m-9}$

অথবা, $50=(8m-9)(4m+3)=32m^2-36m+24m-27$

অথবা, $32m^2-12m-77=0$

অথবা, $(4m-7)(8m+11)=0$ অর্থাৎ, $m=\frac{7}{4}$, বা $-\frac{11}{8}$.

$\therefore$ m-এর মান $\frac{7}{4}$ অথবা $-\frac{11}{8}$ হইলে, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিবে।

উদাহরণ 12. $x^2+px+q=0$ এবং $x^2+qx+p=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিলে, দেখাও যে, $p=q$, অথবা $p+q+1=0$.

প্রমাণ কর যে, উল্লিখিত সমীকরণদ্বয়ের অপর বীজদ্বয় $x^2+x+pq=0$ সমীকরণের বীজ হইবে। [W.B.B.H.S.]

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ বীজটি হইল α.

$\therefore$ α উভয় সমীকরণকেই সিদ্ধ করিবে।

সুতরাং $\alpha^2+p\alpha+q=0$ ... (1)

এবং $\alpha^2+q\alpha+p=0$ ... (2)

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে, $(p-q)\alpha-(p-q)=0$

অথবা $(p-q)(\alpha-1)=0$.

$\therefore$ $p=q$, অথবা $\alpha=1$.

(1)-এ $\alpha=1$ বসাইলে, $1+p+q=0$.

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিলে, $p=q$ হইবে, অথবা $p+q+1=0$ হইবে।

$\alpha=1$; সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ বীজটি হইল 1.

প্রথম সমীকরণের অপর বীজটি β এবং দ্বিতীয় সমীকরণের অপর বীজটি γ হইলে, প্রথম সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল $=1.\beta=q$ এবং দ্বিতীয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল $=1.\gamma=p$. $\therefore$ $\beta=q$ এবং $\gamma=p$.

$\therefore$ $\beta+\gamma=p+q=-1$ ($\therefore$ $p+q+1=0$)

এবং $\beta\gamma=pq$.

সুতরাং β ও γ বীজদ্বয়বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণটি হইল

$$x^2-(\beta+\gamma)x+\beta\gamma=0$$

অথবা, $x^2+x+pq=0$.

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের অপর বীজদ্বয় $x^2+x+pq=0$ সমীকরণের বীজ হইবে।

প্রশ্নমালা VI(A)

[নিম্নলিখিত প্রশ্নে কিছু উল্লেখ না থাকিলে, a, b, c ইত্যাদি অক্ষরগুলি দ্বারা বাস্তব রাশি প্রকাশিত হইবে।]

1. সমাধান কর :

(i) $x^2-x-56=0$. (ii) $6x^2-11x-10=0$.

(iii) $12x^2-x=20$. (iv) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x-1}=2$.

(v) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+6}$.

(vi) $5(x-1)+\frac{2}{x-1}=-9$. (vii) $\frac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+1}}=3$.

(viii) $\frac{2x+\sqrt{x}}{2x-\sqrt{x}}+6.\frac{2x-\sqrt{x}}{2x+\sqrt{x}}=5$.

(ix) $4x^2+6x+\sqrt{(2x^2+3x+4}=13$.

(x) $\sqrt{(x^2-2x+49)}-\sqrt{(x^2-2x+16)}=3$.

2. সমাধান কর :

(i) $x-y=1, xy=6$. (ii) $x+3y=2, x^2+2y^2+3xy=0$.

(iii) $x+y=9, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$. (iv) $\frac{4}{x}+\frac{9}{y}=5, xy=6$.

(v) $2x-3y=4, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{10}$. (vi) $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=5, \frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{5}{6}$.

(vii) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4}, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$. (viii) $x+y=7, 12\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)=7$.

(ix) $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}, x+y=5$

(x) $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{9}{2}, \frac{1}{x+y}=\frac{1}{3}$. (xi) $x+\frac{4}{y}=1, y+\frac{4}{x}=25$.

(xii) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=3, x+y=9$. (xiii) $x+y+3\sqrt{x+y}=x^2+y^2=10$

(xiv) $x^2+y^2+xy=84, x+y-\sqrt{xy}=6$.

(xv) $x-2y+z=0, 9x-8y+3z=0, xy+yz+zx=23$.

(xvi) $x^2-yz=5, y^2-zx=3, z^2-xy=-1$.

3. নিম্নলিখিতগুলি অভেদ অথবা সমীকরণ তাহা নির্ধারণ কর :

(i) $(x-2)(x-3)-8(x-3)(x-1)+9(x-1)(x-2)=2x^2$.

(ii) $\frac{(x-p)(x-q)}{(a-p)(a-q)}+\frac{(x-u)(x-v)}{(a-u)(a-v)}=2$.

(iii) $(x^2-a)(b-a)+(x^2-b)(a-b)=(a-b)^2$.

4. (*a*) নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির বীজদ্বয়ের প্রকৃতি নিরূপণ কর :

(i) $4x^2-9=0$. (ii) $x^2-5x+3=0$. (iii) $x^2+\sqrt{5}x=1$.

(iv) $9x^2-24x+16=0$. (v) $7x^2+8x+4=0$.

(*b*) দেখাও যে, $(x-a)(x-b)=c^2$ এবং $(b-c)x^2+2(c-a)x+(a-b)=0$ সমীকরণদ্বয়ের বীজগুলি সর্বদা বাস্তব।

(*c*) a, b, c মূলদ এবং $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় মূলদ।

5. (*a*) $x^2+2cx+ab=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান হইলে, দেখাও যে, $x^2-2(a+b)x+(a^2+b^2+2c^2)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় কাল্পনিক।

(*b*) $x^2+2cx+b=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় কাল্পনিক হইলে, দেখাও যে, $x^2+2(1+c)x+(1+b+2c)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ও কাল্পনিক।

6 (*a*) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির নিম্নলিখিত শর্তানুযায়ী উহার বীজদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর : (i) $b^2>4ac, ab<0, ac>0$.

(ii) $b^2>4ac, ab>0, ac>0$. [W.B.B.H.S.]

(*b*) কোন্ শর্তে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় উভয়ই (i) ধনাত্মক, (ii) ঋণাত্মক, (iii) শূন্য হইবে? [B. U. Ent.]

7. (*a*) প্রমাণ কর যে, $(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব এবং যদি $a=b=c$ না হয়, তাহা হইলে বীজদ্বয় পরস্পর অসমান। [C. P. U.]

(*b*) প্রমাণ কর যে, k-এর সকল বাস্তব মানের জন্যই $\frac{1}{x-k}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=0$ সমীকরণের বীজগুলি বাস্তব হইবে।

8. (*a*) a-এর মান কত হইলে $3x^2+ax+12=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় পরস্পর সমান হইবে?

(*b*) k-এর মান কত হইলে $x^2-2(5+k)x+3(7+5k)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে?

9 (*a*) $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইলে, দেখাও যে, a, b, c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

(*b*) a,b,c গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে, $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+(b^2+c^2)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান।

(c) $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইলে, দেখাও যে, a,b,c বিপরীত শ্রেণীভুক্ত।

(d) $(a^2+b^2)x^2+2(ac+bd)x+(c^2+d^2)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইলে, প্রমাণ কর যে, $ad=bc$.

(e) $(b^2-ca)x^2-2(c^2-ab)x+(a^2-bc)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইলে, দেখাও যে, $c=0$ অথবা $a^3+b^3+c^3=3abc$.

10.(a) m-এর মান কত হইলে, $\dfrac{a}{x+a+m}+\dfrac{b}{x+b+m}=1$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে ?

(b) c-এর মান কত হইলে $5x^2-(8+3c)x-11c=2$ সমীকরণের বীজদ্বয় পরস্পর অন্যোন্যক হইবে ?

11. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β হইলে, a, b ও c-এর মাধ্যমে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

(i) $\alpha^2+\beta^2$. (ii) $\alpha^3-\beta^3$. (iii) $\alpha^4+\beta^4$. (iv) $\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}$.

(v) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$. (vi) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$. (vii) $(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)$.

(viii) $\dfrac{1}{(a\alpha+b)^3}+\dfrac{1}{(a\beta+b)^3}$.

12. $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β হইলে, p ও q-এর মাধ্যমে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

(i) $\alpha^2-\beta^2$. (ii) $\alpha^4\beta^7+\beta^4\alpha^7$. (iii) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$.

(iv) $\dfrac{\alpha^3}{\beta}+\dfrac{\beta^3}{\alpha}$. (v) $\dfrac{\alpha}{\beta^3}-\dfrac{\beta}{\alpha^3}$. (vi) $\dfrac{\alpha}{a\beta+b}+\dfrac{\beta}{a\alpha+b}$.

(vii) $\alpha^2(\alpha^2\beta^{-1}-\beta)+\beta^2(\beta^2\alpha^{-1}-\alpha)$.

(viii) $(p-\alpha)^{-4}+(p-\beta)^{-4}$.

13. $2x^2+x-4=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

(i) $\alpha^3+\beta^3$. (ii) $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$. (iii) $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}$. (iv) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$.

(v) $\dfrac{\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\beta}{\alpha^2}$.

14. $ax^2+x+b=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β হইলে, দেখাও যে,

$$\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{1}{ab}.$$ [W.B.B.H S.]

15.(*a*) নিম্নে প্রদত্ত বীজগুলি হইতে অনুরূপ দ্বিঘাত সমীকরণগুলি গঠন কর :

(i) 1,2. (ii) 3, − 5. (iii) − 6, − 8. (iv) $a+b, a-b$.

(v) $\frac{p}{q}, \frac{q}{p}$.

(*b*) মূলদ সহগ বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার একটি বীজ

(i) $2+\sqrt{3}$. (ii) $\frac{1}{3+\sqrt{5}}$. (iii) $3+\sqrt{-12}$.

(iv) $\frac{3+2i}{3-2i}$. (v) $\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{p+\sqrt{p^2-4q}}$.

16. নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের মান নির্ণয় কর :

(i) $4x^2+8x+35$, যখন $x=2-\sqrt{-3}$.

(ii) $x^3-7x^2+13x-2$, যখন $x=2+\sqrt{3}$.

(iii) $x^4-4x^3+4x^2+8x+38$, যখন $x=3+2i$.

17. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে, এরূপ সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজদ্বয় হইবে

(i) $3\alpha-2\beta, 3\beta-2\alpha$. (ii) α^3, β^3. (iii) $\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}$.

(iv) $\frac{1}{\alpha+\beta}, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$. (v) $\alpha^2+\beta^2, \alpha^{-2}+\beta^{-2}$.

18. $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে, এরূপ সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজদ্বয় হইবে

(i) $\alpha+\frac{1}{\beta}, \beta+\frac{1}{\alpha}$. (ii) $\frac{\alpha^2}{\beta}, \frac{\beta^2}{\alpha}$. (iii) $\alpha^2-\alpha\beta, \beta^2-\alpha\beta$.

(iv) $1+2\alpha+3\beta, 1+3\alpha+2\beta$. (v) $\alpha+\alpha^2\beta^{-1}, \beta+\beta^2\alpha^{-1}$.

19. (*a*) $2x^2-5x+2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় p এবং q হইলে, কোন্ সমীকরণের বীজদ্বয় হইবে $p+mq, q+mp$? [W.B.B.H.S.]

(*b*) $x^2+8x+15=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে, এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজদ্বয় হইবে $(\alpha+\beta)^2$ ও $(\alpha-\beta)^2$. [W.B.B.H.S.]

(c) $x^2+4x+3=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে, দেখাও যে, যে-সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ ও $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$, তাহা হইল $3x^2-16x+16=0$.

[W.B.B.H.S.]

(d) $2x^2-5x+4=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় m ও n.
$m+n^{-1}$ ও $n+m^{-1}$ বীজদ্বয় বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

(e) $3x^2+6x+2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে, যে-সমীকরণের বীজদ্বয় $-\frac{\alpha^2}{\beta}$ ও $-\frac{\beta^2}{\alpha}$ তাহা নিরূপণ কর। [C.P.U.]

(f) এরূপ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজদ্বয় $3x^2-7x-5=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের বর্গ হইবে। [W.B.B.H.S.]

(g) এরূপ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজদ্বয় $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমান্তরীয় মধ্যক ও গুণোত্তরীয় মধ্যক হইবে।

(h) $\alpha^2=5\alpha-3$, $\beta^2=5\beta-3$ এবং $\alpha\neq\beta$ হইলে, $\frac{\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\beta}{\alpha}$ বীজদ্বয় বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণটি নির্ণয় কর।

20. (a) $x^2+px+q=0$ আকারের একটি দ্বিঘাত সমীকরণে x-বর্জিত পদটি 32-এর পরিবর্তে ভুলক্রমে 35 ছাপা হইল এবং তাহাতে বীজদ্বয় নির্ণীত হইল 5 ও 7. প্রকৃত সমীকরণটির বীজ নির্ণয় কর।

(b) কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি 2 এবং উহাদের ত্রিঘাতের সমষ্টি 27 হইলে, সমীকরণটি গঠন কর।

(c) কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্তর a এবং ভাগফল $r(>1)$ হইলে, সমীকরণটি নির্ণয় কর।

21. (a) $x^2-px+q=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপর বীজটির

(i) দ্বিগুণ হইলে, দেখাও যে $2p^2=9q$.

(ii) চারিগুণ হইলে, দেখাও যে, $4p^2=25q$.

(b) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপর বীজটির n-তম ঘাত হইলে, দেখাও যে, $$\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}+\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}+\frac{b}{a}=0.$$

(c) $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্তর 1 হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$p^2+4q^2=(1+2q)^2.$$

(*d*) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় 3 : 4 অনুপাতে থাকিলে, প্রমাণ কর যে,
$$12b^2=49ac.$$ [B.U.Ent.]

(*e*) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের ভাগফল r হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\frac{(r+1)^2}{r}=\frac{b^2}{ac}.$$ [W.B.B.H.S.]

(*f*) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি উহাদের বর্গের সমষ্টির সমান হইলে, দেখাও যে, $2ac=b(a+b)$.

22. (*a*) $ax^2+2bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β এবং $Ax^2+2Bx+C=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় $\alpha+m$, $\beta+m$ হইলে, দেখাও যে,
$$\frac{b^2-ca}{B^2-CA}=\left(\frac{a}{A}\right)^2.$$ [W.B.B.H.S.]

(*b*) $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের এবং $x^2-qx+p=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্তর একই হইলে, দেখাও যে, $p+q+4=0$ $(p\neq q)$.

(*c*) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় $a'x^2+b'x+c'=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্যোন্যক হইলে, দেখাও যে, $\frac{a}{c'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{a'}$. [B.U.Ent.]

(*d*) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত, $a'x^2+b'x+c'=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাতের সমান হইলে, দেখাও যে, $a'b^2c'=ab'^2c$.

23. $qx^2+px+p=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে, দেখাও যে,
$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{p}{q}}=0.$$

24. (*a*) $b^2x^2-(a^2-2b)x+1=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়কে
$x^2+ax+b=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(*b*) দেখাও যে, $x^2-2ax+c^2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমান্তরীয় মধ্যক, $x^2-2cx+a^2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণোত্তরীয় মধ্যক।

25. (*a*) $x^2-ax+b=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β এবং $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় γ ও δ হইলে, $(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)+(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)$ এবং $(\alpha-\gamma)^2+(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2$-এর মান নির্ণয় কর।

(*b*) $x^2+px+1=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β এবং $x^2+qx+1=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় γ ও δ হইলে, দেখাও যে,
$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2.$$

(c) $x^2+px-r=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β এবং $x^2+px+r=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় γ ও δ হইলে, প্রমাণ কর যে, $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)=(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$.

(d) $x^2-2mx+n^2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β এবং $x^2-2px+q^2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় γ ও δ হইলে এবং $\alpha\delta=\beta\gamma$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$m^2q^2=n^2p^2.$$

(e) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β এবং $lx^2+mx+n=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় γ ও δ হইলে, দেখাও যে, $\alpha\gamma+\beta\delta$ ও $\alpha\delta+\beta\gamma$ বীজদ্বয় বিশিষ্ট সমীকরণটি হইল $a^2l^2x^2-ablmx+b^2ln+m^2ac-4acln=0$.

26. (a) $4x^2+2x-1=0$ সমীকরণের একটি বীজ α হইলে, দেখাও যে, অপর বীজটি হইল $4\alpha^3-3\alpha$.

(b) $x^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় $\alpha\pm\sqrt{\beta}$ হইলে, দেখাও যে, $(b^2-4c)(b^2x^2+4bx)-16c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হইবে $\frac{1}{\alpha}\pm\frac{1}{\sqrt{\beta}}$.

27. (a) k-এর মান কত হইলে $x^2+2x+k=0$ এবং $kx^2+2x+1=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিবে ?

(b) দেখাও যে, $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ এবং $(c-a)x^2+(a-b)x+(b-c)=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ আছে।

(c) $ax^2+2bx+c=0$ এবং $a'x^2+2b'x+c'=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিলে, দেখাও যে,
$(b^2-ac)x^2+(2bb'-a'c-ac')x+(b'^2-a'c')=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান।

28. $x^2+px+q=0$ এবং $x^2+p'x+q'=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিলে, দেখাও যে, তাহা $\frac{pq'-p'q}{q-q'}$ অথবা $\frac{q-q'}{p'-p}$.

29. $ax^2+bx+c=0$ এবং $bx^2+cx+a=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিলে, দেখাও যে, $a+b+c=0$ অথবা $a=b=c$.

30. $p+q+r=0$ হইলে, দেখাও যে, $x^2+px+qr=0$, $x^2+qx+rp=0$ এবং $x^2+rx+pq=0$ সমীকরণত্রয়ের যে-কোন দুইটি সমীকরণের একটি সাধারণ বীজ থাকিবে।

31. $x^2+bx+ca=0$ এবং $x^2+cx+ab=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিলে, দেখাও যে, উহাদের অন্য বীজ দুইটি $x^2+ax+bc=0$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

32. $x^2+ax+b=0$ সমীকরণের একটি বীজ $x^2+cx+d=0$ সমীকরণের একটি বীজ হইলে, দেখাও যে, ইহার অপর বীজটি

$x^2+(2a-c)x+(a^2-ac+d)=0$ সমীকরণের একটি বীজ।

6·10. অপেক্ষক ঃ

দুইটি বাস্তব চলরাশি x ও y-এর মধ্যে যদি এরূপ সম্পর্ক থাকে যাহাতে x-এর প্রত্যেক মানের জন্য y-এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়, তাহা হইলে y-কে x-এর একটি **অপেক্ষক** (function) বলে। একটি মাত্র চলরাশি x দ্বারা গঠিত কোন রাশি x-এর মানের উপর নির্ভর করে বলিয়া ঐরূপ গঠিত রাশিকে x-এর অপেক্ষক বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ, $ax+b$, x-এর একটি একঘাত (linear) অপেক্ষক ; ax^2+bx+c, x-এর একটি দ্বিঘাত (quadratic) অপেক্ষক ; ax^3+bx^2+cx+d, x-এর একটি ত্রিঘাত (cubic) অপেক্ষক ; ইত্যাদি। ইহারা সকলে একটি চলরাশি x-এর অপেক্ষক।

x-এর যে-কোন অপেক্ষককে সাধারণতঃ $f(x)$ দ্বারা সূচিত করা হয়। ইহাকে $\phi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$, ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা সূচিত করা চলে।

x-এর কোন অপেক্ষক $(2x^2-3x+16)$-কে $f(x)$ দ্বারা সূচিত করিলে, যখন x-এর মান $-2, 3, 5$, ইত্যাদি হইবে তখন অপেক্ষক $f(x)$-এর মান যথাক্রমে $f(-2)$, $f(3)$, $f(5)$, ইত্যাদি দ্বারা সূচিত করা হইবে।

$\therefore\quad f(x)=2x^2-3x+16$ হইলে,

$f(-2)=2(-2)^2-3(-2)+16=30$,

$f(3)=2.3^2-3.3+16=25$, $f(5)=2.5^2-3.5+16=51$, ইত্যাদি হইবে।

দুইটি চলরাশি x এবং y দ্বারা গঠিত রাশিকে x এবং y-এর অপেক্ষক বলে। উহাকে সাধারণতঃ $f(x, y)$ দ্বারা সূচিত করা হয়। $f(x, y)$ ও $f(y, x)$ একার্থক নহে। $f(x, y)$-এ x-এর পরিবর্তে y এবং y-এর পরিবর্তে x লিখিলে $f(y, x)$ পাওয়া যায়।

উদাহরণস্বরূপ, $f(x, y)=3x-4y+5$ হইলে, $f(y, x)=3y-4x+5$.

এখানে $f(x, y)\neq f(y, x)$.

$f(x, y)=f(y, x)$ হইলে, $f(x, y)$-কে x ও y-এর **প্রতিসম** (symmetrical) অপেক্ষক বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ, $f(x, y)=x^2+xy+y^2$ হইলে,

$f(y, x)=y^2+yx+x^2=x^2+xy+y^2=f(x, y)$.

$\therefore$ x^2+xy+y^2 রাশিটি দুইটি চলরাশি x ও y-এর একটি প্রতিসম অপেক্ষক।

সেইরূপ $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$, $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$, ইত্যাদি α ও β-এর প্রতিসম অপেক্ষক।

6·11. ax^2+bx+c রাশিমালাটির উৎপাদক নির্ণয় ঃ

$ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির দুইটি বীজ α ও β হইলে,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ এবং } \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

$$\therefore \quad ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β হইলে,
$$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta).$$

অনুসিদ্ধান্ত 2. ax^2+bx+c রাশিমালাটি $(x-\alpha)$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে, যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ α হয়।

(ax^2+bx+c)-কে $x-\alpha$ দ্বারা প্রকৃতভাবে ভাগ করিলে, ভাগফল হইবে $ax+(a\alpha+b)$ এবং ভাগশেষ হইবে $a\alpha^2+b\alpha+c.$

সুতরাং ax^2+bx+c রাশিমালাটিকে $(x-\alpha)$ দ্বারা বিভাজ্য হইতে হইলে ভাগশেষ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ হইবে; অর্থাৎ α-কে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির একটি বীজ হইতে হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 3. দুইটি দ্বিঘাত রাশিমালা ax^2+bx+c এবং $a'x^2+b'x+c'$-এর একটি সাধারণ রৈখিক (linear) উৎপাদক $(x-\alpha)$ থাকিবে, যদি অনুরূপ দ্বিঘাত সমীকরণদ্বয়ের α একটি সাধারণ বীজ হয়। তাহার শর্ত হইল

$$(bc'-b'c)(ab'-a'b)=(ca'-c'a)^2.$$

ইহাই প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ের একটি সাধারণ রৈখিক উৎপাদক থাকিবার শর্ত।

টীকা 1. দ্বিঘাত সমীকরণ ও দ্বিঘাত রাশিমালার পার্থক্য সম্বন্ধে ছাত্রদের সচেতন থাকা বাঞ্ছনীয়। একটি দ্বিঘাত সমীকরণে উহার অজ্ঞাতরাশিটির মাত্র দুইটি মান থাকে কিন্তু একটি দ্বিঘাত-রাশিমালাতে, উহার অজ্ঞাতরাশিটির যে-কোন মান থাকিতে পারে।

টীকা 2. পূর্বের নিয়ম অনুসরণে ax^2+bx+c (a, b, c বাস্তব) দ্বিঘাত রাশিমালাটির উৎপাদকদ্বয়ের প্রকৃতি নিরূপণ করা যায়।

6·12. x ও y রাশিযুক্ত সাধারণ দ্বিঘাত রাশিমালাকে দুইটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিবার শর্ত ঃ

মনে কর, x ও y রাশিযুক্ত সাধারণ দ্বিঘাত রাশিমালাটি হইল

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c, \ (a\neq 0).$$

ইহার অনুরূপ সমীকরণ হইল $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0.$

ইহাকে x-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে,

$$ax^2+2(hy+g)x+(by^2+2fy+c)=0.$$

ইহাকে x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণরূপে গণ্য করিলে,

$$x=\frac{-2(hy+g)\pm\sqrt{4(hy+g)^2-4a(by^2+2fy+c)}}{2a}$$

$$=\frac{-(hy+g)\pm\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}.$$

$$\therefore\quad ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$

$$=a\left\{x+\frac{hy+g-\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}\right\}$$

$$\times\left\{x+\frac{hy+g+\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}\right\}.$$

এই উৎপাদকদ্বয় একঘাত হইবে,

যদি $(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)$ একটি পূর্ণবর্গ হয়,

অর্থাৎ যদি $(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)$ একটি পূর্ণবর্গ হয়।

ইহার শর্ত হইল $4(gh-af)^2=4(h^2-ab)(g^2-ac)$

অথবা, $g^2h^2+a^2f^2-2afgh=g^2h^2-ach^2-abg^2+a^2bc$

অথবা, $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0, (a\neq 0).$

ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

টীকা : $(abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2)$-কে x ও y দুইটি অজ্ঞাতরাশিযুক্ত সাধারণ দ্বিঘাত রাশিমালা $(ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c)$-এর **নিরূপক** বলে।

6·13. ax^2+bx+c দ্বিঘাত রাশিমালাটির চিহ্ন :

ax^2+bx+c (a, b, c বাস্তব এবং $a\neq 0$) দ্বিঘাত রাশিমালাটির চিহ্ন $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয়ের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে।

সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হইলে, $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$.

এখন বীজদ্বয়ের প্রকৃতি তিনপ্রকার হইতে পারে :—

(i) বাস্তব এবং সমান, (ii) বাস্তব এবং অসমান, অথবা (iii) কাল্পনিক।

(i) যদি বীজদ্বয় α ও β, **বাস্তব ও সমান** হয়, তাহা হইলে $\alpha=\beta$.

$\therefore\quad ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2=a\times$ একটি ধনাত্মক রাশি ;

কারণ, x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য $(x-\alpha)^2$ ধনাত্মক হইবে।

$\therefore\quad ax^2+bx+c$ এবং a সমচিহ্নযুক্ত হইবে।

(ii) যদি বীজদ্বয় α ও β **বাস্তব ও অসমান** হয়, তাহা হইলে প্রথমে মনে কর, x-এর মান α ও β-এর মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং $\alpha<x<\beta$ হইলে, $x-\alpha$ ধনাত্মক এবং $x-\beta$ ঋণাত্মক ;

এবং $\beta<x<\alpha$ হইলে, $x-\alpha$ ঋণাত্মক এবং $x-\beta$ ধনাত্মক হইবে।

যে-কোন ক্ষেত্রেই $(x-\alpha)$ ও $(x-\beta)$ পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে, অর্থাৎ $(x-\alpha)$ ও $(x-\beta)$-এর গুণফল ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore\ ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=a\times$ একটি ঋণাত্মক রাশি।

$\therefore\ (ax^2+bx+c)$-এর চিহ্ন a-এর চিহ্নের বিপরীত হইবে।

আবার, যদি x এর মান α ও β-এর মধ্যে অবস্থিত না হয়, তাহা হইলে α ও β উভয় অপেক্ষা x বৃহত্তর হইলে, $(x-\alpha)$ ও $(x-\beta)$ উভয়েই ধনাত্মক এবং α ও β উভয় অপেক্ষা x ক্ষুদ্রতর হইলে, $(x-\alpha)$ ও $(x-\beta)$ উভয়েই ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore$ যে-কোন ক্ষেত্রেই $(x-\alpha)(x-\beta)$ ধনাত্মক হইবে।

$\therefore\ ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=a\times$ একটি ধনাত্মক রাশি।

$\therefore\ ax^2+bx+c$ এবং a সমচিহ্নযুক্ত হইবে।

(iii) যদি বীজদ্বয় α ও β **কাল্পনিক** হয়, তাহা হইলে মনে কর,

$\alpha=p+iq$ এবং $\beta=p-iq$.

$$\therefore\ ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=a\{x-(p+iq)\}\{x-(p-iq)\}$$

$$=a\{(x-p)-iq\}\{(x-p)+iq\}=a\{(x-p)^2+q^2\} \quad (\because i^2=-1)$$

$=a\times$ একটি ধনাত্মক রাশি।

$\therefore\ ax^2+bx+c$ এবং a সমচিহ্নযুক্ত হইবে।

সুতরাং, x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য ax^2+bx+c রাশিমালাটির চিহ্ন a-এর চিহ্নের সমান হইবে ; কেবলমাত্র যখন $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান হইবে এবং x-এর মান ঐ বীজদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোন রাশি হইবে তখন ax^2+bx+c রাশিমালাটির চিহ্ন a-এর চিহ্নের বিপরীত হইবে।

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

(i) a ধনাত্মক হইলে, x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য, $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$ হইবে ; সমান চিহ্ন হইবে যদি $x+\frac{b}{2a}=0$ হয়, অর্থাৎ $x=-\frac{b}{2a}$ হয়।

সেক্ষেত্রে $ax^2+bx+c \geqslant \frac{4ac-b^2}{4a}$.

সুতরাং (ax^2+bx+c)-এর সর্বনিম্ন বা অবম মান হইবে $\frac{4ac-b^2}{4a}$;

এবং ইহা হইবে, যখন $x=-\frac{b}{2a}$.

এস্থলে a ধনাত্মক বলিয়া, x-এর মানের যথেচ্ছ বৃদ্ধিতে $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$-এর মানও যথেচ্ছ বৃদ্ধি পাইবে। সুতরাং (ax^2+bx+c)-এর সর্বোচ্চ বা চরম মান নাই।

(ii) a ঋণাত্মক হইলে, x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \leqslant 0$ হইবে ; সমান চিহ্ন হইবে, যদি $x+\frac{b}{2a}=0$ হয়, অর্থাৎ $x=-\frac{b}{2a}$ হয়।

সেক্ষেত্রে, $ax^2+bx+c \leqslant \frac{4ac-b^2}{4a}$.

সুতরাং (ax^2+bx+c)-এর সর্বোচ্চ বা চরম মান হইবে $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

এবং ইহা হইবে যখন $x=-\frac{b}{2a}$.

এস্থলে a ঋণাত্মক বলিয়া, x-এর মানের যথেচ্ছ বৃদ্ধিতে $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$-এর মান যথেচ্ছ ক্ষুদ্র হইবে। সুতরাং (ax^2+bx+c)-এর কোন সর্বনিম্ন বা অবম মান নাই।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

মনে কর, $ax^2+bx+c=y$. $\therefore$ $ax^2+bx+(c-y)=0$.

x-এর বাস্তব মানের জন্য নিরূপক $b^2-4a(c-y) \geqslant 0$

অথবা, $4a\left\{y-\frac{4ac-b^2}{4a}\right\} \geqslant 0$

অথবা, $y-\frac{4ac-b^2}{4a} \geqslant 0$, যদি a ধনাত্মক হয়,

$\leqslant 0$, যদি a ঋণাত্মক হয়।

সুতরাং a ধনাত্মক হইলে, x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য

y অথবা (ax^2+bx+c)-এর সর্বনিম্ন মান $\frac{4ac-b^2}{4a}$

এবং a ঋণাত্মক হইলে y অথবা (ax^2+bx+c)-এর সর্বোচ্চ মান $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

6·15. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. m-এর মান কত হইলে $2x^2+xy-my^2-3x+6y-9$ রাশিমালাটিকে দুইটি একঘাতবিশিষ্ট উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাইবে? ঐ উৎপাদকদ্বয় নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালাটিকে $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ আকারের রাশিমালাটির সহিত তুলনা করিলে,

$$a=2,\ h=\tfrac{1}{2},\ b=-m,\ g=-\tfrac{3}{2},\ f=3,\ c=-9.$$

$$\therefore\quad abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$
$$=2(-m)(-9)+2.3.(-\tfrac{3}{2}).\tfrac{1}{2}-2.3^2-(-m)(-\tfrac{3}{2})^2-(-9)(\tfrac{1}{2})^2$$
$$=18m-\tfrac{9}{2}-18+\tfrac{9}{4}m+\tfrac{9}{4}=\tfrac{81}{4}m-\tfrac{81}{4}.$$

প্রদত্ত রাশিমালাটিকে দুইটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাইবে, যদি $\frac{81}{4}m-\frac{81}{4}=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $m=1$ হয়।

প্রদত্ত রাশিমালাটির অনুরূপ সমীকরণ হইল

$$2x^2+xy-y^2-3x+6y-9=0$$

অথবা, $2x^2+x(y-3)-(y^2-6y+9)=0.$

ইহাকে x-এর একটি দ্বিঘাতসমীকরণরূপে গণ্য করিলে,

$$x=\frac{-(y-3)\pm\sqrt{(y-3)^2+4.2(y^2-6y+9)}}{2.2}$$

$$=\frac{-(y-3)\pm\sqrt{9(y-3)^2}}{4}=\frac{-(y-3)\pm3(y-3)}{4}=\frac{y-3}{2},\ 3-y.$$

$$\therefore\quad \text{প্রদত্ত রাশিমালা}=2\left[\left(x-\frac{y-3}{2}\right)\{x-(3-y)\}\right]$$
$$=(2x-y+3)(x+y-3).$$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদকদ্বয় হইল $(2x-y+3)$ ও $(x+y-3)$.

উদাহরণ 2. x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য $3x^2+4x+5$ রাশিমালাটির চিহ্ন নির্ধারণ কর।

$3x^2+4x+5$ রাশিমালাটির অনুরূপ সমীকরণ হইল $3x^2+4x+5=0.$

ইহার নিরূপক $=4^2-4.3\ 5=16-60=-44=$ ঋণাত্মক।

$\therefore$ সমীকরণটির বীজদ্বয় কাল্পনিক।

অতএব প্রদত্ত রাশিমালাটি, x^2-এর সহগের সহিত সমচিহ্নবিশিষ্ট হইবে।

এখানে x^2-এর সহগের চিহ্ন ধনাত্মক। সুতরাং প্রদত্ত রাশিমালাটি x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য ধনাত্মক।

বিকল্প পদ্ধতি :

$3x^2+4x+5=3(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9})+\frac{11}{3}=3(x+\frac{2}{3})^2+\frac{11}{3}$.

x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য ইহা ধনাত্মক।

সুতরাং x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত রাশিমালাটির মান ধনাত্মক।

উদাহরণ 3. x-এর মান বাস্তব হইলে, $3-20x-25x^2$ রাশিটির সর্বাধিক মান এবং x-এর অনুরূপ মান নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

মনে কর, $y=3-20x-25x^2$

অথবা, $25x^2+20x+(y-3)=0$.

ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

x-এর বাস্তব মানের জন্য ইহার নিরূপক $\geqslant 0$ হইবে।

$\therefore\ (20)^2-4.25(y-3)\geqslant 0$

অথবা, $7-y\geqslant 0$ অর্থাৎ $y\leqslant 7$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালাটির সর্বাধিক মান 7.

$y=7$ হইলে, $7=3-20x-25x^2$

অথবা, $25x^2+20x+4=(5x+2)^2=0$, অর্থাৎ $x=-\frac{2}{5}$.

বিকল্প পদ্ধতি :

$3-20x-25x^2=7-(25x^2+20x+4)=7-(5x+2)^2$.

x-এর বাস্তব মানের জন্য $(5x+2)^2\geqslant 0$ অর্থাৎ $-(5x+2)^2\leqslant 0$

(সমান চিহ্ন হইবে যখন $5x+2=0$ অর্থাৎ $x=-\frac{2}{5}$)

$\therefore\ 3-20x-25x^2\leqslant 7$.

সুতরাং $(3-20x-25x^2)$-এর সর্বাধিক মান 7 এবং x-এর অনুরূপ মান $-\frac{2}{5}$.

উদাহরণ 4. x-এর মান বাস্তব হইলে, $3x^2-6x+8$ রাশিমালাটির সর্বনিম্ন মান এবং x-এর অনুরূপ মান নির্ণয় কর।

মনে কর, $y=3x^2-6x+8$.

$\therefore\ 3x-6x+(8-y)=0$.

ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। x-এর বাস্তব মানের জন্য ইহার নিরূপক

$(-6)^2-4.3(8-y)\geqslant 0$

অথবা, $y-5\geqslant 0$ অর্থাৎ $y\geqslant 5$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালাটির সর্বনিম্নমান 5.

$y=5$ হইলে, $5=3x^2-6x+8$

অথবা, $3x^2-6x+3=3(x-1)^2=0$, অর্থাৎ $x=1$.

বিকল্প পদ্ধতি : $3x^2-6x+8=3(x^2-2x+1)+5=3(x-1)^2+5.$

x-এর বাস্তব মানের জন্য $(x-1)^2 \geqslant 0$ বলিয়া, প্রদত্ত রাশিমালাটির সর্বনিম্ন-মান 5 এবং x-এর অনুরূপ মান 1.

উদাহরণ 5. যদি দ্বিঘাত রাশি $3x^2+2(p+q+r)x+(pq+qr+rp)$ একটি পূর্ণবর্গ হয় তাহা হইলে দেখাও যে, $p=q=r.$ [W. B. B. H. S.]

প্রদত্ত রাশিমালাটি একটি পূর্ণবর্গ হইলে, উহার অনুরূপ সমীকরণটির বীজদ্বয় সমান হইবে। ইহার শর্ত হইল সমীকরণটির নিরূপক শূন্য হইবে।

$$\therefore \quad \{2(p+q+r)\}^2-4.3(pq+qr+rp)=0$$

অথবা, $p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp=0$

অথবা, $\frac{1}{2}\{(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2\}=0.$

$p,\ q,\ r$ বাস্তব ধরিলে তিনটি পূর্ণবর্গ রাশির বা ধনাত্মক রাশির সমষ্টি শূন্য হইতেছে। সুতরাং ধনাত্মক রাশি তিনটির প্রত্যেকটি শূন্য হইবে।

$\therefore \quad p-q=0,\ q-r=0,\ r-p=0$ অর্থাৎ $p=q=r.$

উদাহরণ 6. x-এর যে-কোন বাস্তবমান হইলে, দেখাও যে, $\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+4}$ রাশিমালার মান $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{7}{6}$-এর মধ্যে থাকিবে। [W. B. B. H. S.]

মনে কর, $y=\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+4}.$

$$\therefore \quad x^2(y-1)+x(2y-1)+(4y-2)=0.$$

ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য ইহার নিরূপক $(2y-1)^2-4(y-1)(4y-2)\geqslant 0$

অথবা, $-(12y^2-20y+7)\geqslant 0$ অথবা, $12y^2-20y+7\leqslant 0$

অথবা, $(2y-1)(6y-7)\leqslant 0.$ $\quad\cdots\quad$ (1)

এখন সমীকরণ $(2y-1)(6y-7)=0$-এর বীজদ্বয় $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{7}{6}.$

y-এর মান $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা ছোট হইলে উভয় উৎপাদক $(2y-1)$ এবং $(6y-7)$ ঋণাত্মক হইবে অর্থাৎ $(2y-1)(6y-7)>0$ হইবে ; কিন্তু (1) হইতে, ইহা সম্ভব নয়। y-এর মান $\frac{7}{6}$ অপেক্ষা বড় হইলে, উভয় উৎপাদক $(2y-1)$ এবং $(6y-7)$ ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ $(2y-1)(6y-7)>0$ হইবে ; কিন্তু (1) হইতে ইহা সম্ভব নয়।

$\therefore$ y-এর মান $\frac{1}{2}$ ও $\frac{7}{6}$-এর মধ্যে থাকিবে ; কারণ, সেক্ষেত্রে উৎপাদক $(2y-1)$ ধনাত্মক এবং $(6y-7)$ ঋণাত্মক হইবে অর্থাৎ $(2y-1)(6y-7)<0$ হইবে।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির মান $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{7}{6}$-এর মধ্যে থাকিবে।

টীকা : প্রদত্ত রাশিমালাটির চরম মান $\frac{7}{4}$ এবং অবম মান $\frac{1}{2}$, যখন x-এর মান যথাক্রমে -4 এবং 0.

উদাহরণ 7. x-এর যে-কোন বাস্তবমানের জন্য দেখাও যে, $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ রাশিমালাটির মান 5 এবং 9-এর মধ্যবর্তী হইতে পারে না। [C. P. U.]

মনে কর, $y=\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$.

$\therefore \quad x^2(y-1)+2x(y-17)-(7y-71)=0.$

ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। x-এর বাস্তব মানের জন্য ইহার নিরূপক $\{2(y-17)\}^2+4(y-1)(7y-71)$ ধনাত্মক হইবে,

অথবা, $8y^2-112y+360$ ধনাত্মক হইবে,

অথবা, $8(y^2-14y+45)$ ধনাত্মক হইবে,

অথবা, $(y-5)(y-9)$ ধনাত্মক হইবে।

দুইটি উৎপাদক $(y-5)$ এবং $(y-9)$-এর গুণফল ধনাত্মক বলিয়া উৎপাদকদ্বয় একই চিহ্নের হইবে।

$(y-5)$ ধনাত্মক হইলে অর্থাৎ $y>5$ হইলে, $(y-9)$ও ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ $y>9$ হইবে।

সুতরাং $y>9$ হইলে, উভয় উৎপাদক ধনাত্মক হইবে এবং $(y-5)(y-9)$ ধনাত্মক হইবে।

আবার, $(y-5)$ ঋণাত্মক হইলে, অর্থাৎ $y<5$ হইলে,
$(y-9)$ও ঋণাত্মক হইবে, অর্থাৎ $y<9$ হইবে।

সুতরাং $y<5$ হইলে, উভয় উৎপাদক ঋণাত্মক হইবে এবং $(y-5)(y-9)$ ধনাত্মক হইবে।

$\therefore$ y-এর মান 5 এবং 9-এর মধ্যে থাকিবে না।

উদাহরণ 8. x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য দেখাও যে, $\frac{2x^2+4x+1}{x^2+4x+2}$ রাশিমালাটির যে-কোন বাস্তব মান হইতে পারে। [B. U. Ent.]

মনে কর, $y=\frac{2x^2+4x+1}{x^2+4x+2}$.

$\therefore \quad x^2(y-2)+4x(y-1)+(2y-1)=0.$

ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য ইহার নিরূপক $\{4(y-1)\}^2-4(y-2)(2y-1)$ ধনাত্মক হইবে,

অর্থাৎ, $4(2y^2-3y+2)$ ধনাত্মক হইবে,

অর্থাৎ $8\left\{\left(y^2-\frac{3}{2}y+\frac{9}{16}\right)+\frac{7}{16}\right\}=8\left\{\left(y-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right\}$ ধনাত্মক হইবে।

y-এর যাবতীয় বাস্তব মানের জন্যই ইহা সম্ভব।

$\therefore$ x বাস্তব হইলে, y-এর অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিমালাটির যে-কোন বাস্তব মান (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) হইতে পারে।

টীকা : এক্ষেত্রে y-এর কোন চরম বা অবম মান নাই।

প্রশ্নমালা VI(B)

1. দেখাও যে, $6x^2-5xy-6y^2+14x+5y+4$ রাশিমালাটিকে দুইটি একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় এবং ঐ উৎপাদকদ্বয় নির্ণয় কর।

2. m-এর মান কত হইলে $12x^2-10xy+my^2+11x-5y+2$ রাশিমালাটিকে দুইটি একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় এবং ঐ উৎপাদকদ্বয় নির্ণয় কর।

3. $axy+bx+cy+d$ রাশিমালাটিকে দুইটি একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাইলে, দেখাও যে, $ad=bc$.

4. যদি $ax^2+by^2+cz^2+2ayz+2bzx+2cxy$ রাশিমালাটিকে দুইটি একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়, তবে দেখাও যে,

$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

5. কোন্ শর্তে $ax^2+2hxy+by^2$ রাশিমালাটিকে $(y-mx)$ এবং $(my+x)$ আকারের দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাইবে?

6. x-বাস্তব হইলে, নিম্নলিখিত রাশিমালাগুলির চিহ্ন নির্ধারণ কর :

(i) $3x^2-2x+7$. (ii) $7x-8x^2-5$. (iii) $2x^2+5x+6$.

7. x-এর মান কত হইলে $2x^2+8x-10$ রাশিমালাটি ঋণাত্মক হইবে?

8 (*a*) x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য a-এর মান কত হইলে, $x^2-ax+1-2a^2$ রাশিমালাটি সর্বদা ধনাত্মক হইবে?

(*b*) দেখাও যে, কেবলমাত্র x-এর মান কোন নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকিলে $8x-15-x^2$ রাশিমালাটি ধনাত্মক হইবে এবং ঐ সীমাগুলি নির্ণয় কর।

9. দেখাও যে, x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য
$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+5$ সর্বদা ধনাত্মক।

10. (a) x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য $5+8x-8x^2$ রাশিমালাটির সর্বোচ্চমান কত? x-এর অনুরূপ মান নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

(b) x বাস্তব হইলে, দেখাও যে, $(1-x)(2+3x)$-এর চরম মান $\frac{25}{12}$ এবং তখন $x=\frac{1}{6}$.

11. (a) x-এর যে-কোন বাস্তবমানের জন্য দেখাও যে, $(3x^2-8x+\frac{52}{3})$-এর মান 12 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না এবং $(4x+7-3x^2)$-এর মান $8\frac{1}{3}$ অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না।

(b) 8-কে এরূপ দুই অংশে ভাগ কর যাহাতে অংশদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি ক্ষুদ্রতম হয়।

12. (a) দেখাও যে, $3x^2-4x+10$ রাশিমালাটি x-এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য ধনাত্মক। রাশিমালাটির সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

(b) দেখাও যে, x বাস্তব হইলে $(x+2)(x+3)$-এর অবম মান $-\frac{1}{4}$ এবং তখন $x=-\frac{5}{2}$.

13. (a) $(a_1x^2+2b_1x+c_1)$-এর একটি উৎপাদক $x-a$ এবং $(a_2x^2+2b_2x+c_2)$-এর একটি উৎপাদক $x+a$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(a_1c_2-c_1a_2)^2+4(a_1b_2+a_2b_1)(b_1c_2+b_2c_1)=0.$$

(b) কোন্ শর্তে $ax^2+2hxy+by^2$ এবং $a'x^2+2h'xy+b'y^2$ রাশিমালাদ্বয়ের যথাক্রমে $y-mx$ এবং $my+x$ আকারের উৎপাদক থাকিবে?

14. যদি দ্বিঘাত রাশি $(ab+bc+ca)x^2-2(a+b+c)x+3$ একটি পূর্ণবর্গ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে, $a=b=c$.

15. (a) $x^2-px+q^2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব হইলে, দেখাও যে, p-এর মান $-2q$ এবং $2q$-এর মধ্যে থাকিবে না।

(b) দুইটি বাস্তব রাশি x ও y, $x^2+12xy+4y^2-26x-44y+89=0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করিলে, দেখাও যে, x-এর মান 1 ও 4-এর মধ্যে থাকিতে পারে না এবং y-এর মান 1 ও $\frac{5}{2}$-এর মধ্যে থাকিতে পারে না।

16. x-এর বাস্তব মানের জন্য দেখাও যে, $\dfrac{3x^2+2x+12}{x^2+2x+4}$-এর মান $\frac{7}{3}$ এবং 5-এর মধ্যে থাকিবে। [W.B.B.H.S.]

17. x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য দেখাও যে, $\dfrac{x}{x^2-5x+9}$-এর মান $-\frac{1}{11}$ এবং 1-এর মধ্যে অবস্থিত। [B. U. Ent.]

18. x-এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$ রাশিমালাটির মান যে-সীমার মধ্যে থাকিবে তাহা নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

19. x বাস্তব হইলে, $\frac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3}$-এর সর্বোচ্চ গাণিতিক মান কত?

[W.B.B.H.S.]

20. x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ রাশিমালাটির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান এবং x-এর অনুরূপ মান নির্ণয় কর। [C.P.U.]

21. x-এর বাস্তব মানের জন্য দেখাও যে,

(*a*) $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+4)}$ রাশিমালাটির মান $\frac{4}{9}$ এবং 1-এর মধ্যে থাকিবে না।

(*b*) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3x+1}-\frac{1}{(x+1)(3x+1)}$ রাশিমালাটির মান 1 এবং 4-এর মধ্যে থাকিবে না।

22. x বাস্তব হইলে, দেখাও যে, $\frac{x^2+2x-11}{2(x-3)}$ রাশিমালাটির 2 এবং 6-এর মধ্যবর্তী কোন মান ব্যতীত যে-কোন মান হইতে পারে। [W.B.B.H.S.]

23. $p>1$ হইলে, দেখাও যে, x-এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য $\frac{x^2-2x+p^2}{x^2+2x+p^2}$ রাশিমালাটির মান $\frac{p-1}{p+1}$ এবং $\frac{p+1}{p-1}$-এর মধ্যে থাকিবে।

24. যদি x বাস্তব এবং p-এর মান 1 ও 7-এর মধ্যবর্তী হয়, তাহা হইলে দেখাও যে, $\frac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}$ রাশিমালাটির যে-কোন বাস্তব মান হইতে পারে।

25. x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য দেখাও যে, $\frac{(ax-b)(b'x-a')}{(bx-a)(a'x-b')}$ রাশিমালাটির যে-কোন বাস্তব মান হইতে পারে, যদি a^2-b^2 এবং $a'^2-b'^2$ একই চিহ্ন বিশিষ্ট হয়।

সপ্তম অধ্যায়

বিন্যাস ও সমবায়

(Permutations and Combinations)

A. বিন্যাস

7·1. সংজ্ঞা : কতিপয় বস্তু হইতে কয়েকটি করিয়া অথবা সব কয়টি একত্র লইয়া উহাদিগকে বিভিন্ন প্রকারের ক্রমে সাজাইলে, ঐ সাজানগুলির (Arrangements) প্রত্যেকটিকে বস্তুগুলির এক-একটি **বিন্যাস** (Permutation) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, a ও b অক্ষরদ্বয়কে একত্র লইয়া বিভিন্ন ক্রমে সাজাইলে উহাদের ab ও ba দুইটি বিন্যাস হয় ;

a, b ও c অক্ষর তিনটির দুইটি করিয়া লইয়া বিভিন্ন ক্রমে সাজাইলে উহাদের ab, ba, bc, cb, ca ও ac ছয়টি বিন্যাস হয় ;

a, b ও c অক্ষর তিনটির সবগুলিকে একত্রে লইয়া বিভিন্ন ক্রমে সাজাইলে উহাদের abc, acb, bca, bac, cab ও cba ছয়টি বিন্যাস হয় ; ইত্যাদি।

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া লইয়া উহাদের বিন্যাসের সংখ্যাকে সাধারণতঃ ^nP_r বা $_nP_r$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। এখানে অবশ্যই $r \leqslant n$.

7·2. গৌণিক : প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফলকে অর্থাৎ 1 হইতে আরম্ভ করিয়া 1, 2, 3, প্রভৃতি n পর্যন্ত ক্রমিক সংখ্যাগুলির গুণফলকে **গৌণিক n** (Factorial n) বলা হয় এবং ইহাকে সাধারণতঃ $\underline{|n}$ বা $n\,!$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$\therefore \quad n\,! = 1.2.3.4.5.\cdots\cdots(n-1).n.$$

$$1\,! = 1\;;\; 2\,! = 1.2 = 2\;;\; 3\,! = 1.2.3 = 6\;;\; 4\,! = 1.2.3.4 = 24\;;$$

$5\,! = 1.2.3.4.5 = 120$; ইত্যাদি।

আবার, $n\,! = 1.2.3.4.5\cdots\cdots(n-1)n = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)\,!$, ইত্যাদি।

টীকা : $0\,!$ হইল 1 মানবিশিষ্ট একটি প্রতীক মাত্র, অর্থাৎ $0\,! = 1$ ধরা হয়।

7·3. একটি প্রয়োজনীয় নিয়ম :

যদি কোন একটি প্রক্রিয়া m-সংখ্যক বিভিন্ন প্রকারে করা যায় এবং ঐরূপ এক প্রকারে প্রক্রিয়াটি অনুষ্ঠিত হইবার পর অপর একটি প্রক্রিয়া যদি n-সংখ্যক বিভিন্ন প্রকারে করা যায়, তাহা হইলে ঐ দুইটি প্রক্রিয়া মিলিতভাবে $m \times n$ বিভিন্ন প্রকারে করা যাইবে।

যদি প্রথম প্রক্রিয়াটি ঐ m-প্রকারের যে-কোন এক প্রকারে করা যায়, তাহা হইলে দ্বিতীয়টি n-প্রকারে করা যাইবে। এইবার যদি প্রথম প্রক্রিয়াটি আর এক ভিন্ন প্রকারে করা যায়, তাহা হইলে আবার দ্বিতীয়টি n-প্রকারে করা যাইবে। এইভাবে প্রথম প্রক্রিয়ার প্রতিটি প্রকারের জন্য দ্বিতীয়টি n-প্রকারে করা যাইবে। কিন্তু প্রথমটি মোট m-প্রকারে করা যায়; সুতরাং প্রক্রিয়া দুইটি মিলিতভাবে $m \times n$ বিভিন্ন প্রকারে করা যাইবে।

উদাহরণস্বরূপ, মনে কর, কোন বাড়ীতে চারিটি দরজা আছে। এক ব্যক্তি স্থির করিল, একদিন সে ঐ বাড়ীতে একটি দরজা দিয়া প্রবেশ করিবে এবং অন্য একটি দরজা দিয়া বাহির হইবে। সে যদি এক নম্বর দরজা দিয়া প্রবেশ করে, তাহা হইলে বাহির হইবার সময় সে অন্য তিনটি দরজার যে কোন একটি দিয়া বাহির হইতে পারিবে, অর্থাৎ 3 প্রকারে বাহির হইতে পারিবে। এইভাবে, সে দুই নম্বর দরজা দিয়া প্রবেশ করিলে, 3 প্রকারে বাহির হইতে পারিবে ; তিন নম্বর দরজা দিয়া প্রবেশ করিলে 3 প্রকারে বাহির হইতে পারিবে ; চার নম্বর দরজা দিয়া প্রবেশ করিলেও 3 প্রকারে বাহির হইতে পারিবে। সুতরাং প্রবেশ ও বাহির $3+3+3+3$ অর্থাৎ 4×3 প্রকারে হইবে।

টীকা : যদি কোন একটি প্রক্রিয়া m-সংখ্যক বিভিন্ন প্রকারে করা যায় এবং ঐরূপ এক প্রকারে প্রক্রিয়াটি অনুষ্ঠিত হইবার পর দ্বিতীয় একটি প্রক্রিয়া যদি n-সংখ্যক বিভিন্ন প্রকারে করা যায় এবং এই দুইটি প্রক্রিয়া কোন এক পদ্ধতিতে অনুষ্ঠিত হইবার পর তৃতীয় একটি প্রক্রিয়া যদি p-সংখ্যক বিভিন্ন প্রকারে করা যায়, তাহা হইলে ঐ তিনটি প্রক্রিয়া মিলিতভাবে $m \times n \times p$ বিভিন্ন প্রকারে করা যাইবে।

7.4. বিভিন্ন বস্তু সমূহের বিন্যাস ঃ

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক ($r \leqslant n$) করিয়া লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া বস্তু একযোগে লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা, n-সংখ্যক বস্তু দ্বারা r-সংখ্যক শূন্যস্থান যত প্রকারে পূর্ণ করা যায় (কোন স্থানে একটির অধিক বস্তু রাখা চলিবে না), সেই সংখ্যার সমান।

প্রথম শূন্যস্থানটিকে n বিভিন্ন বস্তু দ্বারা n প্রকারে পূর্ণ করা যায়, কারণ n বস্তুর যে-কোন একটি দ্বারা ঐ স্থানটিকে পূর্ণ করা যায়। প্রথম স্থানটি n প্রকারের যে-কোন এক প্রকারে পূর্ণ হইবার পর দ্বিতীয় শূন্যস্থানটিকে $(n-1)$ প্রকারে পূর্ণ করা যায়, কারণ অবশিষ্ট $(n-1)$ বস্তুর যে-কোন একটি দ্বারা

দ্বিতীয় স্থানটিকে পূর্ণ করা যায়। তাহা হইলে, প্রথম স্থান n প্রকারে পূর্ণ করা যায় এবং তাহা পূর্ণ করিবার পর দ্বিতীয় স্থান $(n-1)$ প্রকারে পূর্ণ করা যায়। সুতরাং প্রথম দুইটি স্থান মিলিতভাবে $n(n-1)$ প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

প্রথম দুইটি স্থান $n(n-1)$ প্রকারের যে-কোন এক প্রকারে পূর্ণ হইয়া যাইবার পর তৃতীয় স্থানটিকে $(n-2)$ প্রকারে পূর্ণ করা যায়, কারণ অবশিষ্ট $(n-2)$ বস্তুর যে-কোন একটি দ্বারা তৃতীয় স্থানটিকে পূর্ণ করা যায়। সুতরাং পূর্বেকার নিয়মানুসারে, প্রথম তিনটি স্থান মিলিত ভাবে $n(n-1)(n-2)$ প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

এইরূপে অগ্রসর হইয়া লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে, যে-কোন স্তরে উৎপাদকসংখ্যা, শূন্যস্থান পূরণের সংখ্যার সমান। সুতরাং r-সংখ্যক শূন্যস্থানকে যত প্রকারে পূর্ণ করা যায়, তাহার সংখ্যা হইবে r-সংখ্যক উৎপাদকের গুণফল।

এখানে r-তম উৎপাদক $=n-(r-1)=n-r+1$.

$\therefore$ r-সংখ্যক শূন্যস্থান যত প্রকারে পূর্ণ করা যায়, তাহার সংখ্যা

$=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots r$-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$$=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

$$\therefore \quad {}^nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

অনুসিদ্ধান্ত : n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সবগুলিকে এক যোগে লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা $={}^nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$$=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 2.1=n!.$$

$$\therefore \quad {}^nP_n=n!.$$

টীকা 1 : ${}^nP_n=n!$, সুতরাং $\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n.$ $\therefore$ $0!=1.$

টীকা 2 : ${}^nP_n={}^nP_{n-1}$, কারণ ${}^nP_{n-1}=\frac{n!}{\{n-(n-1)\}!}=n!={}^nP_n$.

টীকা 3 : ${}^nP_1=n$, কারণ ${}^nP_1=\frac{n!}{(n-1)!}=n.$

টীকা 4 : ${}^nP_r$-এর মান সর্বাধিক হইবে, যখন $r=n$ অথবা $n-1$,

7·5. সবগুলি ভিন্ন নহে এরূপ বস্তুসমূহের বিন্যাস ঃ সবগুলি বিভিন্ন নয় এরূপ n-সংখ্যক বস্তুর সবগুলি একত্র লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়

n-সংখ্যক বস্তুকে n-সংখ্যক অক্ষর দ্বারা সূচিত কর। উহাদের মধ্যে মনে কর, p-সংখ্যক a, q-সংখ্যক b, r-সংখ্যক c আছে এবং অপর অক্ষরগুলি সবই বিভিন্ন।

মনে কর, বিন্যাসের নির্ণেয় সংখ্যা $= x$.

সুতরাং, এই x-সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটি বিন্যাসে p-সংখ্যক a, q-সংখ্যক b, r-সংখ্যক c এবং বাকী অক্ষরগুলি বিভিন্ন থাকিবে। এই x-সংখ্যক বিন্যাসের যে-কোন একটি বিন্যাসে যদি p-সংখ্যক a-কে পরিবর্তিত করিয়া p-সংখ্যক নূতন অক্ষর লওয়া হয়, যাহারা পরস্পর বিভিন্ন এবং অপর অক্ষরগুলি হইতেও বিভিন্ন তাহা হইলে, অপর অক্ষরগুলির অবস্থানের কোনরূপ পরিবর্তন না করিয়া উহাদিগকে নিজেদের p-সংখ্যক অবস্থানে বিভিন্ন ক্রমে সাজাইলে ঐ একটি মাত্র বিন্যাস হইতে $p\,!$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে। সুতরাং সমুদয় x-সংখ্যক বিন্যাস হইতে মোট $x \times p\,!$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

অনুরূপভাবে, এই $x \times p\,!$ সংখ্যক বিন্যাসের যে-কোন একটিতে যদি q-সংখ্যক b-কে পরিবর্তিত করিয়া q-সংখ্যক নূতন অক্ষর লওয়া হয়, যাহারা পরস্পর বিভিন্ন এবং অপর অক্ষরগুলি হইতেও বিভিন্ন, তাহা হইলে উহাদিগকে নিজেদের q-সংখ্যক অবস্থানে বিভিন্ন ক্রমে সাজাইলে ঐ একটিমাত্র বিন্যাস হইতে $q\,!$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে। সুতরাং সমুদয় $x \times p\,!$ সংখ্যক বিন্যাস হইতে মোট $x \times p\,! \times q\,!$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

আবার, এই $x \times p\,! \times q\,!$ বিন্যাসের প্রত্যেকটি হইতে, r-সংখ্যক c-এর পরিবর্তে পরস্পর ভিন্ন এবং অবশিষ্ট অক্ষরগুলি হইতে ভিন্ন r-সংখ্যক নূতন অক্ষর লইয়া উহাদিগকে নিজেদের r-সংখ্যক অবস্থানে বিভিন্ন ক্রমে সাজাইলে, $r\,!$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে। সুতরাং বিন্যাসের মোট সংখ্যা হইবে $x \times p\,! \times q\,! \times r\,!$.

এক্ষণে, p-সংখ্যক a, q-সংখ্যক b এবং r-সংখ্যক c উল্লিখিতরূপে পরিবর্তিত হইয়া n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর হইল। এই n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষরের সবগুলিকে একযোগে লইয়া সাজাইলে বিন্যাসের সংখ্যা হইবে $n\,!$.

$$\therefore\ x \times p\,! \times q\,! \times r\,! = n\,!. \quad \therefore\ x = \frac{n\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!}.$$

টীকা ঃ এস্থলে সমজাতীয় বস্তু তিন প্রকারের আছে। সমজাতীয় বস্তু আরও অধিক প্রকারের থাকিলেও উপরের প্রণালী এবং অনুরূপ সূত্র প্রযোজ্য হইবে।

7·6. একই বস্তু বারবার লইয়া বিন্যাস ঃ

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়, যখন যে-কোন বস্তুকে r-সংখ্যক বার পর্যন্ত লওয়া চলে।

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু করিয়া একযোগে লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা (যখন যে-কোন বস্তুকে r-সংখ্যক বার পর্যন্ত ইচ্ছামত লওয়া চলে), n-সংখ্যক বস্তু দ্বারা r-সংখ্যক শূন্যস্থান যত প্রকারে পূর্ণ করা যায় (প্রত্যেক বস্তুকে r-সংখ্যক বার পর্যন্ত যতবার ইচ্ছা ব্যবহার করা চলিবে, কিন্তু কোনস্থানে একটির অধিক বস্তু রাখা চলিবে না), সেই সংখ্যার সমান।

প্রথম শূন্যস্থানটিকে n বিভিন্ন বস্তু দ্বারা n-প্রকারে পূর্ণ করা যায়, কারণ n বস্তুর যে-কোনটি দ্বারা ঐ স্থানটিকে পূর্ণ করা যায়। প্রথম স্থানটি n-প্রকারের যে-কোন এক প্রকারে পূর্ণ হইবার পর দ্বিতীয় শূন্যস্থানটিকে n-প্রকারে পূর্ণ করা যায়, কারণ যে-বস্তুটি প্রথম স্থানে বসিয়াছে তাহাকে আবার ব্যবহার করা যায়। সুতরাং প্রথম দুইটি স্থান $n \times n$ বা n^2-প্রকারে পূর্ণ করা যায়। অনুরূপভাবে, তৃতীয় স্থানটিও n-প্রকারে পূর্ণ করা যায়। অতএব, প্রথম তিনটি স্থান n^3-প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

এইরূপে অগ্রসর হইয়া লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে, যে-কোন স্তরে যতগুলি স্থান পূর্ণ হয় n-এর সূচক তাহার সহিত সমান। সুতরাং r-সংখ্যক শূন্যস্থান n^r-প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা$=n^r$.

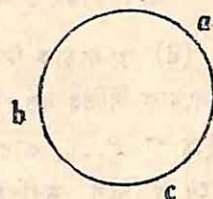
7·7. বৃত্তাকারে বিন্যাস ঃ

কতকগুলি বিভিন্ন বস্তুকে এক সারিতে (in a row) সাজাইলে যে-বিন্যাস হয়, তাহাকে **রৈখিক বিন্যাস** (linear permutation) বা শুধু **বিন্যাস** বলে। এ পর্যন্ত এইরূপ বিন্যাসের বিষয়েই আলোচনা করা হইয়াছে।

বস্তুগুলিকে বৃত্তাকারে (in a circle) সাজাইলে যে-বিন্যাস হয় তাহাকে **বৃত্তাকার বা বৃত্তীয় বিন্যাস** (circular permutation) বলে।

উক্ত দুইপ্রকার বিন্যাসের মধ্যে পার্থক্য এই যে, রৈখিক বিন্যাসের দুইটি প্রান্ত বা সীমা থাকে কিন্তু বৃত্তাকার বিন্যাসে কোন প্রান্ত থাকে না। সেইজন্য যে-কোন সংখ্যক বস্তুর রৈখিক ও বৃত্তাকার বিন্যাসের সংখ্যা সমান নহে। রৈখিক বিন্যাস, বস্তুগুলির স্বতন্ত্র অবস্থানের উপর নির্ভর করে, কিন্তু বৃত্তাকার বিন্যাস, বস্তুগুলির আপেক্ষিক অবস্থানের উপর নির্ভর করে।

উদাহরণস্বরূপ, a, b, c অক্ষর তিনটিকে একত্র লইলে রৈখিক এবং বৃত্তাকার বিন্যাসগুলি হয় $abc, acb, bca, bac, cab, cba$. রৈখিক বিন্যাসে এই বিন্যাসগুলি

বিভিন্ন এবং ইহাদের সংখ্যা $=3\,!=6$; কিন্তু বৃত্তাকার বিন্যাসে এই বিন্যাসগুলির abc, bca, cab বিন্যাসত্রয় অভিন্ন, কারণ পার্শ্বের চিত্র হইতে দেখা যায়, a, b ও c-কে বাম আবর্তে বা ঘড়ির কাঁটার বিপরীতদিকে ক্রমান্বয়ে ধরিলে a, b ও c-এর একই অবস্থান (বা একটি মাত্র বিন্যাস) হইতে এই তিনটি বিন্যাস পাওয়া যায়। সুতরাং বাম আবর্তের এই বিন্যাস তিনটি প্রকৃতপক্ষে একটি বিন্যাস। অনুরূপভাবে, বাকী acb, bac, cba বিন্যাসত্রয় অভিন্ন, কারণ a, b ও c-কে দক্ষিণ আবর্তে বা ঘড়ির কাঁটার দিকে ক্রমান্বয়ে ধরিলে a,b ও c-এর একই অবস্থান (বা একটি মাত্র বিন্যাস) হইতে এই তিনটি বিন্যাস পাওয়া যায়। সুতরাং দক্ষিণ আবর্তের এই বিন্যাস তিনটি প্রকৃতপক্ষে একটি বিন্যাস। সুতরাং উভয় আবর্তের বৃত্তাকার বিন্যাস-সংখ্যা $=2$ বা $(3-1)\,!$ এবং এক আবর্তের বৃত্তাকার বিন্যাস-সংখ্যা 1 অথবা $\frac{1}{2}(3-1)\,!$.

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বৃত্তাকার বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়

বৃত্তাকার বিন্যাস বস্তুগুলির আপেক্ষিক অবস্থানের উপর নির্ভর করে। সুতরাং এস্থলে আপেক্ষিক বিন্যাসই আমাদের বিবেচ্য।

মনে কর, বৃত্তাকার n স্থানে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে যে-কোন প্রকারে বসাইয়া দেওয়া হইল। এইবার যে-কোন একটি বস্তুর অবস্থান স্থির রাখিয়া অবশিষ্ট $(n-1)$ বস্তুকে নিজেদের মধ্যে যথাসম্ভব বিভিন্ন উপায়ে সাজাইলে সমগ্র আপেক্ষিক বিন্যাস পাওয়া যাইবে এবং তাহার সংখ্যা হইবে ${}^{n-1}P_{n-1}$ বা $(n-1)\,!$.

চক্রক্রম আবর্তনের দিকের কথা ছাড়িয়া দিলে (অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটার দিকে এবং উহার বিপরীত দিকের বিন্যাসকে অভিন্ন ধরিলে) n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বৃত্তাকার বিন্যাসের সংখ্যা হইবে $\frac{1}{2}(n-1)\,!$.

টীকা : বিভিন্ন রংয়ের n-সংখ্যক পুঁতি লইয়া যতগুলি মালা তৈয়ারী করা যায় তাহার সংখ্যা হইল $\frac{1}{2}(n-1)\,!$; কিন্তু n-সংখ্যক ব্যক্তি একটি গোলটেবিল ঘিরিয়া মোট যত প্রকারে বসিতে পারে তাহার সংখ্যা হইল

$n\,!$, (যদি বিন্যাসগুলি টেবিলের তুলনায় হিসাব করা হয়)

কিংবা $(n-1)\,!$, (যদি বিন্যাসগুলি নিজেদের তুলনায় হিসাব করা হয়)।

7·8. কয়েকটি বিশেষ শর্তাধীন বিন্যাস :

(i) p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু কখনই থাকিবে না, এই শর্তে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া বস্তু একযোগে লইলে বিন্যাসের সংখ্যা হইবে ${}^{n-p}P_r$, কারণ

যে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু কখনই থাকিবে না, তাহাদের বাদ দিলে r-সংখ্যক স্থান $(n-p)$-সংখ্যক বস্তু দ্বারা মোট ${}^{n-p}P_r$ উপায়ে পূর্ণ করা যায়।

এখানে অবশ্যই $p \leqslant n$, $r \leqslant n$ এবং $r+p \leqslant n$.

(ii) p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু, সমসংখ্যক নির্ধারিত স্থান অধিকার করিবে, এই শর্তে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া বস্তু একযোগে লইলে, বিন্যাসের সংখ্যা হইবে ${}^{n-p}P_{r-p}$, কারণ প্রথমেই p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তুগুলিকে সমসংখ্যক নির্ধারিত স্থানে রাখিলে, অবশিষ্ট $(r-p)$-সংখ্যক স্থান অবশিষ্ট $(n-p)$-সংখ্যক বস্তু দ্বারা ${}^{n-p}P_{r-p}$ উপায়ে পূর্ণ করা যায়। এখানে অবশ্যই $p \leqslant r \leqslant n$.

(iii) p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সব বিন্যাসগুলির মধ্যেই থাকিবে, এই শর্তে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া বস্তু একযোগে লইলে, বিন্যাসের সংখ্যা হইবে

$$ {}^{n-p}P_{r-p} \times {}^{r}P_{p}, \quad (p \leqslant r \leqslant n). $$

p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তুকে পৃথক করিয়া রাখিলে, অবশিষ্ট $(n-p)$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে $(r-p)$-সংখ্যক করিয়া বস্তু একযোগে লইলে বিন্যাসের সংখ্যা হয় ${}^{n-p}P_{r-p}$. এখন এই বিন্যাসগুলির যে-কোন একটিকে লইয়া p-সংখ্যক নির্দিষ্টবস্তু-গুলিকে একেএকে অন্তর্ভুক্ত করিতে হইবে। বিন্যাসের বস্তুসংখ্যা $(r-p)$ বলিয়া, p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তুর প্রথমটি $(r-p+1)$ উপায়ে অন্তর্ভুক্ত করা যায়। প্রথমটির অন্তর্ভুক্তির পর দ্বিতীয়টি অন্তর্ভুক্ত করা যায় $(r-p+2)$ উপায়ে, তারপর তৃতীয়টি $(r-p+3)$ উপায়ে, ইত্যাদি এবং শেষবস্তুটি (অর্থাৎ p-তম বস্তুটি) $r-(p-p)$ বা r উপায়ে বিন্যাসভুক্ত করা যায়। এইরূপে p-সংখ্যক বস্তুকে বিন্যাসভুক্ত করিয়া ${}^{n-p}P_{r-p}$ সংখ্যক বিন্যাসের প্রতিটি হইতে r-সংখ্যক বস্তু সমন্বিত $(r-p+1)(r-p+2)(r-p+3)\cdots(r-1)r$ সংখ্যক বা ${}^{r}P_{p}$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়। এই বিন্যাসগুলির প্রতিটিতে নির্দিষ্ট p-সংখ্যক বস্তু বর্তমান।

$$ \therefore \text{ বিন্যাসের নির্ণেয় সংখ্যা} = {}^{n-p}P_{r-p} \times {}^{r}P_{p}. $$

টীকা : ${}^{n-1}P_r + r.{}^{n-1}P_{r-1} = {}^{n}P_r$.

সূত্র হইতে, বামপক্ষ $= \dfrac{(n-1)!}{(n-r-1)!} + \dfrac{r(n-1)!}{(n-r)!}$

$$ = \frac{(n-1)!\,(n-r+r)}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} = {}^{n}P_r = \text{ডানপক্ষ।} $$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু একযোগে লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা
=(একটি নির্দিষ্ট বস্তু কখনই থাকিবে না, এই শর্তে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া বস্তু একযোগে লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা)
+(একটি নির্দিষ্ট বস্তু সব বিন্যাসগুলির মধ্যেই থাকিবে, এই শর্তে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু একযোগে লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা)।

$$\therefore \quad {}^{n}P_{r} = {}^{n-1}P_{r} + r.{}^{n-1}P_{r-1} \qquad [\text{(i) ও (iii) হইতে}]$$

7·9. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. ${}^{10}P_3$-এর মান নির্ণয় কর।

$${}^{10}P_3 = \frac{(10)!}{(10-3)!} = \frac{(10)!}{7!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7!}{7!} = 720.$$

উদাহরণ 2. ${}^{2n+1}P_{n-1} : {}^{2n-1}P_{n} = 3 : 5$ হইলে, n-এর মান নির্ণয় কর।

এখানে, $$\frac{3}{5} = \frac{{}^{2n+1}P_{n-1}}{{}^{2n-1}P_n} = \frac{\dfrac{(2n+1)!}{\{(2n+1)-(n-1)\}!}}{\dfrac{(2n-1)!}{(2n-1-n)!}} = \frac{(2n+1)!\times(n-1)!}{(n+2)!\times(2n-1)!}$$

$$= \frac{(2n+1)\times 2n\times(2n-1)!\times(n-1)!}{(n+2)(n+1)n(n-1)!\times(2n-1)!} = \frac{4n+2}{n^2+3n+2}$$

অথবা, $3n^2+9n+6 = 20n+10$

অথবা, $3n^2-11n-4=0$

অথবা, $(3n+1)(n-4)=0$ অর্থাৎ $n=4, -\frac{1}{3}$.

n কখনও ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ হইতে পারে না। সুতরাং $n=4$.

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $(2n)! = 2^n.\{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)\}.n!$.

$$\begin{aligned}(2n)! &= 1.2.3.4.5.6.\cdots\cdots(2n-1).2n\\ &= \{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)\}(2.4.6.\cdots\cdots 2n)\\ &= \{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)\}\{(2.1).(2.2).(2.3)\cdots\cdots(2.n)\}\\ &= \{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)\}\,2^n.(1.2.3.\cdots\cdots n)\\ &= 2^n.\{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)\}.n!.\end{aligned}$$

উদাহরণ 4. তিন ব্যক্তি একটি ঘরে প্রবেশ করিয়া দেখিল যে, তাহাদের জন্য 6টি চেয়ার সরলরেখায় বসানো আছে। উহারা কত প্রকারে শূন্যচেয়ারে বসিতে পারিবে, সূত্রের সাহায্য না লইয়া, সেই সংখ্যা নির্ণয় কর।

প্রথম ব্যক্তিটি 6টি চেয়ারের যে-কোন একটিতে বসিতে পারে বলিয়া প্রথম ব্যক্তি

6 প্রকারে চেয়ারে বসিতে পারিবে। প্রথম ব্যক্তি ঐ 6টি চেয়ারের যে-কোন একটিতে বসিবার পর দ্বিতীয় ব্যক্তি অবশিষ্ট 5টি চেয়ারের যে-কোন একটিতে বসিয়া 5 প্রকারে চেয়ারে বসিতে পারিবে। অতএব প্রথম ব্যক্তির প্রত্যেক প্রকার চেয়ারে বসার জন্য দ্বিতীয় ব্যক্তি 5 প্রকারে চেয়ারে বসিতে পারে। সুতরাং প্রথম ও দ্বিতীয় ব্যক্তি 6×5 প্রকারে চেয়ারে বসিতে পারিবে।

এই 6×5 প্রকারের যে-কোন এক প্রকারে প্রথম ও দ্বিতীয় ব্যক্তি 2টি চেয়ারে বসিলে তৃতীয় ব্যক্তি অবশিষ্ট 4টি চেয়ারের যে-কোন একটিতে 4 প্রকারে বসিতে পারিবে। সুতরাং তিন ব্যক্তি $6 \times 5 \times 4$ বা 120 প্রকারে চেয়ারে বসিতে পারিবে।

উদাহরণ 5. চারজন ভ্রমণকারী একটি শহরে পৌঁছিয়া দেখিল যে, ঐ শহরে পাঁচটি হোটেল আছে। প্রত্যেকে ভিন্ন হোটেলে বাস করিলে, কত প্রকারে তাহারা বাসা লইতে পারে? [W.B.B.H.S.]

চারজন ভ্রমণকারী পাঁচটি ভিন্ন হোটেলে যত প্রকারে বাসা লইতে পারে, তাহার সংখ্যা হইল $^5P_4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5! = 1.2.3.4.5 = 120.$

উদাহরণ 6. 'CONTACT' শব্দটির অক্ষরগুলির সবগুলি একযোগে লইয়া কতগুলি বিন্যাস করা যায়? [W.B.B.H.S.]

প্রদত্ত শব্দে 7টি অক্ষর আছে। উহাদের মধ্যে দুইটি T, দুইটি C এবং বাকী তিনটি বিভিন্ন।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= \frac{7!}{2!2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 1260.$

উদাহরণ 7. 'DRAUGHT' শব্দটির সমস্ত অক্ষরগুলি একযোগে লইয়া এবং স্বরবর্ণ (vowel) দুইটি একত্রে রাখিয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় কর। [C. P. U.]

প্রদত্ত শব্দটিতে সর্বমোট 7টি অক্ষর আছে। উহাদের মধ্যে দুইটি (A,U) স্বরবর্ণ এবং অবশিষ্ট 5টি ব্যঞ্জনবর্ণ। স্বরবর্ণ দুইটিকে একটি অক্ষর ধরিলে মোট 6টি বিভিন্ন অক্ষর [(A, U), D,R,G,H ও T) হইবে এবং উহাদের সবগুলিকে একত্র লইয়া সাজাইলে বিন্যাসের সংখ্যা হইবে 6!.

আবার, স্বরবর্ণ দুইটিকে একত্র রাখিয়া উহাদিগকে নিজেদের মধ্যে 2! প্রকারে সাজান যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= 6! \times 2! = 720 \times 2 = 1440.$

উদাহরণ 8. 'BALLOON' শব্দটির সমস্ত অক্ষরগুলি একযোগে লইয়া কতগুলি শব্দ পাওয়া যাইবে, যাহাদের মধ্যে দুইটি 'L' পাশাপাশি থাকিবে না? [C.U.B.Com.]

প্রদত্ত শব্দটিতে 7টি অক্ষর আছে—উহাদের মধ্যে দুইটি 'L', দুইটি 'O' এবং বাকী তিনটি বিভিন্ন।

সুতরাং 7টি অক্ষর একযোগে লইলে মোট সংখ্যা $=\dfrac{7!}{2!\,2!}=1260.$

ইহার মধ্যে কতকগুলি শব্দে দুইটি 'L' পাশাপাশি থাকিবে এবং অবশিষ্ট শব্দগুলিতে উহারা পাশাপাশি থাকিবে না। দুইটি 'L'-কে একটি অক্ষর ধরিলে যে-সমস্ত শব্দে দুইটি 'L' পাশাপাশি থাকিবে তাহাদের সংখ্যা পাওয়া যায় $\dfrac{6!}{2!}=360.$

সুতরাং যে-সমস্ত শব্দে দুইটি 'L' পাশাপাশি থাকিবে না, তাহাদের সংখ্যা

$$=1260-360=900.$$

উদাহরণ 9. 5 জন বালক এবং 3 জন বালিকাকে কত প্রকারে বিন্যাস করা যায়, যাহাতে কোন দুইটি বালিকা কখনও পাশাপাশি না থাকে? [W.B.B.H.S.]

5 জন বালককে নিজেদের ভিতর 5! প্রকারের বিন্যাস করা যায় এবং এই বিন্যাস-গুলির প্রত্যেকটির জন্য ঐ 5টি বালকের মাঝে 4 জায়গায় এবং উহাদের দুই প্রান্তে 2 জায়গায় অর্থাৎ মোট 6 জায়গায় 3 জন বালিকাকে $^6P_3$ প্রকারে সাজান যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $=5!\times {}^6P_3=5!\times\dfrac{6!}{(6-3)!}$

$$=120\times6\times5\times4=14400.$$

উদাহরণ 10. 3, 4, 0, 5, 8 অঙ্কগুলি দ্বারা 10 ও 100-এর মধ্যবর্তী কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়? [W.B.B.H.S.]

নির্ণেয় সংখ্যাগুলি 10 ও 100-এর মধ্যবর্তী বলিয়া উহাদের প্রত্যেকটি দুই অঙ্ক-বিশিষ্ট হইবে এবং উহাদের প্রথম অঙ্ক কোনক্রমেই শূন্য হইবে না।

প্রদত্ত পাঁচটি অঙ্ক হইতে দুইটি করিয়া লইলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা $={}^5P_2=\dfrac{5!}{(5-2)!}=5\times4=20.$ ইহাই দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার মোট সংখ্যা। ইহার মধ্যে কিছু সংখ্যার প্রথম অঙ্ক শূন্য এবং অবশিষ্টগুলির প্রথম অঙ্ক শূন্য নহে। যে-সংখ্যাগুলির প্রথম অঙ্ক শূন্য তাহার সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইলে প্রথম অঙ্কটি শূন্য ধরিয়া বাকী 4টি অঙ্ক (3, 4, 5, 8) হইতে 1টি অঙ্ক লইতে হইবে। ইহার সংখ্যা হইল

$$^4P_1=4.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুলির সংখ্যা $=20-4=16.$

উদাহরণ 11. 2, 3, 4 অঙ্কগুলির সাহায্যে চারিঅঙ্ক অপেক্ষা বৃহত্তর নহে এরূপ কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় ? [B.U.Ent.]

এখানে, একই অঙ্ক পুনরায় ব্যবহার করা যাইতে পারে।

স্থতরাং এক অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যার সংখ্যা $=3^1$;

দুই-অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যার সংখ্যা $=3^2$;

তিন-অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যার সংখ্যা $=3^3$;

এবং চারি-অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যার সংখ্যা $=3^4$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যার সংখ্যা $=3^1+3^2+3^3+3^4=3+9+27+81=120.$

উদাহরণ 12. 5 জন বালক কত রকমে বৃত্তাকারে বসিতে পারে ? একটি গোল টেবিলের চারিদিকে উহারা কত রকমে বসিতে পারিবে ?

একটি বালক একস্থানে বসিলে অপর 4টি বালক ডান বা বাম আবর্তে $\frac{4\,!}{2}$ প্রকারে বৃত্তাকারে বসিতে পারিবে। স্থতরাং 5 জন বালক এক আবর্তে $\frac{4\,!}{2}$ বা 12 প্রকারে এবং উভয় আবর্তে 4 ! বা 24 প্রকারে বসিতে পারিবে।

গোল টেবিলের ক্ষেত্রে বিন্যাসগুলির সম্পর্ক টেবিলের সহিত, কিন্তু ঐগুলি বালকদের পরস্পরের অবস্থান নিরপেক্ষ হইবে। স্থতরাং নির্ণেয় সংখ্যা $=5\,!=120.$

প্রশ্নমালা VII(A)

1. $5\,!$, ${}^8P_4$ এবং ${}^{12}P_3$-এর মান নির্ণয় কর।

2. (i) ${}^nP_3=60$ হইলে, n-এর মান কত ?

(ii) ${}^8P_r=56$ হইলে, r-এর মান নির্ণয় কর।

(iii) ${}^nP_4=12.{}^nP_2$ হইলে, n-এর মান নির্ণয় কর।

(iv) ${}^{n-1}P_3 : {}^{n+1}P_3=2:7$ হইলে, n-এর মান নির্ণয় কর।

(v) ${}^{m+n}P_2=90$ এবং ${}^{m-n}P_2=12$ হইলে, m এবং n-এর মান কত ?

3. প্রমাণ কর :

(i) ${}^nP_r=n.{}^{n-1}P_{r-1}=(n-r+1).{}^nP_{r-1}$.

(ii) ${}^{2n}P_n=2^n.\{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)\}$.

(iii) $2.6.10.14.\cdots\cdots$ n-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$=(n+1)(n+2)(n+3)\cdots\cdots$ n-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত।

(iv) $1.{}^1P_1+2.{}^2P_2+3.{}^3P_3+\cdots\cdots+n.{}^nP_n={}^{n+1}P_{n+1}-1.$

4. তিনটি বালক একটি হলঘরে প্রবেশ করিয়া দেখিল যে, আটটি আসন সরলরেখায় পাতা আছে। বালকগুলি যত রকমে বসিতে পারিবে, সূত্রের সাহায্য না লইয়া, সেই সংখ্যা নির্ণয় কর।

5. চাঁদপালঘাট ও বোটানিক্যাল গার্ডেনের মধ্যে 12টি পারাপারের স্টীমার যাতায়াত করে, এক ব্যক্তি কত বিভিন্ন উপায়ে চাঁদপালঘাট হইতে বোটানিক্যাল গার্ডেনে যাইয়া ভিন্ন স্টীমারে ফিরিয়া আসিতে পারে? [W.B.B.H.S.]

6. কোন রেলপথে 26টি স্টেশন আছে। এক স্টেশন হইতে অপর স্টেশনে যাইতে কতগুলি বিভিন্ন দ্বিতীয় শ্রেণীর টিকিটের প্রয়োজন হইবে? [W.B.B.H.S.]

7. কোন খামের মধ্যে একের অধিক চিঠি না রাখিয়া 6টি খামের মধ্যে 6টি চিঠি কত প্রকারে রাখা যাইবে?

8. নিম্নলিখিত শব্দসমূহের অক্ষরগুলিকে একযোগে লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় কর :

(i) INDIA. (ii) COLLEGE. (iii) PARAMESH.
(iv) INSTITUTIONS. (v) ASSASSINATION.

9. দেখাও যে, 'CALCUTTA'শব্দটির অক্ষরগুলির বিন্যাস-সংখ্যা 'AMERICA' শব্দটির অক্ষরগুলির বিন্যাস-সংখ্যার দ্বিগুণ।

10. 'JUXTAPOSED' শব্দটির সমস্ত অক্ষরগুলি একযোগে লইয়া এবং স্বরবর্ণ চারিটি একত্রে রাখিয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

11. স্বরবর্ণগুলি যাহাতে কখনই পৃথক্ না হয়, এইরূপে 'VALEDICTORY' শব্দটির অক্ষরগুলি কতরকমে সাজান যায়? [W.B.B.H.S.]

12. (*a*) 'TOMATO' শব্দটির T-গুলি পৃথক রাখিয়া অক্ষরগুলি কতপ্রকারে সাজান যায় তাহা নির্ণয় কর। [C.P.U.]

(*b*) 'SUCCESS' শব্দটির S-গুলি একত্রে না রাখিয়া অক্ষরগুলি কতপ্রকারে সাজান যায়?

13. স্বরবর্ণগুলি কেবলমাত্র বিজোড় স্থানে থাকিবে এরূপে 'POINTED'শব্দটির অক্ষরগুলিকে কত প্রকারে সাজান যায়?

14. 'TRIANGLE' শব্দটির অক্ষরগুলি হইতে সবগুলি অক্ষর একযোগে লইয়া মোট কতগুলি শব্দ পাওয়া যায়? উহাদের কতগুলি T দিয়া আরম্ভ?

উহাদের কতগুলি T দিয়া আরম্ভ এবং E দিয়া শেষ?

উহাদের কতগুলির প্রথমে T কিন্তু শেষে E থাকিবে না?

15. 'MONDAY' শব্দটির অক্ষরগুলি হইতে সবগুলি একযোগে লইয়া কতগুলি বিন্যাস পাওয়া যায় ? উহাদের কতগুলি M দিয়া আরম্ভ নহে ?

উহাদের কতগুলির প্রথম অক্ষর M হইবে কিন্তু শেষ অক্ষর Y হইবে না ?

16. প্রদত্ত পাঁচটি অক্ষরের 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 2টি স্বরবর্ণ। ঐ পাঁচটি অক্ষর একযোগে লইয়া কতগুলি শব্দ পাওয়া যাইবে, যাহাতে দুইটি ব্যঞ্জনবর্ণ কখনই পাশাপাশি থাকিবে না ?

17. 6 জন একাদশ শ্রেণীর ছাত্র এবং 4 জন দ্বাদশ শ্রেণীর ছাত্রীকে কতপ্রকারে বিন্যাস করা যাইতে পারে, যাহাতে কোন দুইটি দ্বাদশ শ্রেণীর ছাত্রী কখনও পাশাপাশি না থাকে ?

18. বিভিন্ন বয়সের আটজন বালকের মধ্যে বিভিন্ন আকৃতির আটটি রাজভোগ কতরকমভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া যাইতে পারে, যাহাতে বৃহত্তম রাজভোগটি সর্বদা কনিষ্ঠ বালকটিকে দেওয়া হয় ? [C.U. B.Com.]

19. (*a*) 10টি বিভিন্ন বস্তুর সবগুলি একসাথে লইয়া কত প্রকারে সাজান যায়, যাহাতে দুইটি নির্দিষ্ট বস্তু কখনই একত্রে থাকিবে না ? [B.U.B. Com.]

(*b*) 11টি পরীক্ষার খাতা কত বিভিন্ন প্রকারে বিন্যাস করা যায় যাহার কোনটিতেই সর্বোৎকৃষ্ট এবং সর্বনিকৃষ্ট খাতা একত্রে থাকিবে না ?

20. দেখাও যে, n-সংখ্যক বইকে একটি তাকে (shelf) যত রকমভাবে সাজান যায়, যাহাতে দুইটি নির্দিষ্ট বই

(i) কখনই একত্রে থাকিবে না, তাহার সংখ্যা হইল $(n-2)(n-1)!$.

(ii) সর্বদা একত্রে থাকিবে, তাহার সংখ্যা হইল $2(n-1)!$. [C.P.U.]

21. n-সংখ্যক বস্তু হইতে 6টি করিয়া লইয়া গঠিত নির্দিষ্ট বস্তুযুক্ত বিন্যাস-সংখ্যা, ঐ নির্দিষ্ট বস্তুশূন্য বিন্যাস-সংখ্যার সমান হইলে n-এর মান কত ?

[যতগুলি বিন্যাসে নির্দিষ্ট বস্তুটি কখনই থাকিবে না, তাহাদের সংখ্যা $= {}^{n-1}P_6$

এবং যতগুলি বিন্যাসে নির্দিষ্ট বস্তুটি সর্বদা থাকিবে, তাহাদের সংখ্যা $= {}^{n}P_6 - {}^{n-1}P_6$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে, ${}^{n}P_6 - {}^{n-1}P_6 = {}^{n-1}P_6$, ইত্যাদি।]

22. একটি পাঠাগারে কোন এক পুস্তকের 5 কপি, অন্য দুই পুস্তকের প্রত্যেকের 4 কপি করিয়া, অপর তিন পুস্তকের প্রত্যেকের 6 কপি করিয়া এবং আটটি বিভিন্ন পুস্তক এক কপি করিয়া আছে। সমস্ত পুস্তকগুলিকে কত প্রকারে সাজান যায় ?

23. কোন অঙ্ক একাধিকবার না লইয়া 3, 4, 5, 6 ও 7 অঙ্কগুলি হইতে 5000 অপেক্ষা বৃহত্তর চারি অঙ্কের কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় ? [W.B.B.H.S.]

24. (*a*) কোন অঙ্ক একাধিকবার না লইয়া 0, 1, 2, 3, 4 ও 5 অঙ্কগুলি হইতে কতগুলি 6-অঙ্কবিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায় ? [C.U.B. Com.]

(*b*) কোন অঙ্ক একাধিকবার না লইয়া 3, 1, 5, 2 ও 0 অঙ্কগুলি হইতে কতগুলি সার্থক চারিঅঙ্কবিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায় ? [B.U.Ent.]

(*c*) **7, 5, 4, 7, 6, 5, 7** অঙ্কগুলির সাহায্যে সাত অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি যুগ্ম সংখ্যা গঠন করা যায় ?

(*d*) 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলির কোনটিকেই একই-সংখ্যায় একাধিকবার ব্যবহার না করিয়া 300 অপেক্ষা বৃহত্তর কতগুলি জোড় সংখ্যা বাহির করা যায় নির্ণয় কর।

[C. U. B. Com.]

25. কোন অঙ্ক একাধিকবার না লইয়া 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ও 9 অঙ্কগুলির সাহায্যে 1000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ও 5 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় ?

26. 1, 2, 3, 4, 5 ও 6 অঙ্কগুলির সাহায্যে 3000 ও 4000-এর মধ্যবর্তী কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় ? [W.B.B.H.S.]

27. আবৃত্তির জন্য একটি, খেলাধূলার জন্য একটি, সদাচরণের জন্য একটি এবং সাধারণ ব্যুৎপত্তির জন্য একটি, এই চারিটি পুরস্কার আটজন ছাত্রের মধ্যে কত প্রকারে বিতরণ করা যায় ?

28. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে যদি একযোগে r-সংখ্যক বস্তুর অধিক না লওয়া হয় এবং যদি n-সংখ্যক বস্তুর প্রত্যেকটিই যতবার ইচ্ছা লওয়া যায়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, মোট $\frac{n(n^r-1)}{n-1}$-সংখ্যক বিন্যাস হইতে পারে।

29. (*a*) আটজন বালক কত প্রকারে বৃত্তাকারে বসিতে পারে ?

(*b*) ছয়জন বালিকা একটি গোল টেবিলের চারিদিকে কত রকমে বসিতে পারে ?

(*c*) বিভিন্ন বর্ণের সাতটি মুক্তা দিয়া কত প্রকারে মালা গাঁথা যায় ?

30. 5 জন বৈজ্ঞানিক এবং 5 জন সাহিত্যিক একটি গোল টেবিলের ধারে একান্তরভাবে (alternatively) কত প্রকারে বসিতে পারেন ?

31. একটি গোল টেবিলের ধারে ধারে 8 জন ব্যক্তি কতপ্রকারে বসিতে পারে, যাহাতে কোন দুই প্রকারে পাশাপাশি একইভাবে লোক না থাকে ?

32. একটি গোল টেবিলের ধারে 5 জন পুরুষ এবং 2 জন স্ত্রীলোক কত প্রকারে বসিতে পারে, যাহাতে স্ত্রীলোক দুইটি (i) একত্রে বসে, (ii) পৃথকভাবে বসে ?

B. সমবায়

7·10. সংজ্ঞা ঃ

কতিপয় বস্তু হইতে সমসংখ্যা কয়েকটি করিয়া অথবা সব কয়টি একত্রে লইয়া ক্রমনিরপেক্ষভাবে যতপ্রকারে সম্ভব দল (Group) গঠন করা যায়, তাহাদের প্রত্যেকটি দলকে বস্তুগুলির এক-একটি **সমবায়** (Combination) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, a ও b অক্ষরদ্বয়কে একত্রে লইয়া ক্রমনিরপেক্ষভাবে সাজাইলে, উহাদের ab একটিমাত্র দল বা সমবায় পাওয়া যায় ; a, b ও c অক্ষর তিনটির দুইটি করিয়া লইয়া ক্রমনিরপেক্ষভাবে সাজাইলে, উহাদের ab, bc ও ca তিনটি সমবায় পাওয়া যায় ; a, b ও c অক্ষর তিনটির সবগুলি একত্রে লইয়া ক্রমনিরপেক্ষভাবে সাজাইলে, উহাদের একটি মাত্র সমবায় abc পাওয়া যায় ; ইত্যাদি।

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে প্রতিবার r-সংখ্যক করিয়া লইলে উহাদের সমবায়ের সংখ্যাকে সাধারণতঃ ${}^nC_r$ অথবা ${}_nC_r$ অথবা $\binom{n}{r}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। এখানে অবশ্যই $r \leqslant n$.

7·11. বিন্যাস ও সমবায়ের পার্থক্য ঃ

বিন্যাসে ক্রম বিবেচ্য ; কিন্তু সমবায়ে ক্রম বিবেচ্য নহে, কেবলমাত্র দলই বিবেচ্য। কতকগুলি বস্তুর বিবিধ দলসমূহ হইল উহাদের সমবায় এবং এই সমবায়সমূহকে বিভিন্ন ক্রমে সাজাইলে বস্তুগুলির বিন্যাস পাওয়া যাইবে, অর্থাৎ কতকগুলি বস্তুকে বিন্যাস করিতে হইলে উহাদের সমবায়সমূহকে বিন্যাস করিতে হইবে। সংক্ষেপে সমবায় বলিতে বুঝায় নির্বাচন এবং বিন্যাস বলিতে বুঝায় নির্বাচন ও ক্রম।

দুইটি সমবায়ের বস্তুগুলি অভিন্ন হইলেই সমবায় দুইটিকেও অভিন্ন ধরা হয়। কিন্তু দুইটি বিন্যাস অভিন্ন হইবে যদি দলীয় বস্তুগুলি অভিন্ন হয় এবং বস্তুগুলি উভয়ক্ষেত্রে একইক্রমে সাজান থাকে। সুতরাং একটি মাত্র সমবায় হইতে একাধিক বিন্যাস গঠন করা সম্ভব। উদাহরণস্বরূপ, abc এই একটিমাত্র সমবায় হইতে abc, acb, bca, bac, cab ও cba এই ছয়টি বিন্যাস পাওয়া যায়।

সাধারণভাবে, ${}^nP_r > {}^nC_r$, ($r \neq 1$).

টীকা ঃ শব্দ গঠন ও সংখ্যা গঠন প্রভৃতি প্রশ্নে নির্বাচনের সহিত বিন্যাসের প্রশ্ন সংযুক্ত থাকে। সেজন্য এইরূপ প্রশ্ন হইতে কতগুলি সমবায় গঠন করা যায় তাহা নির্ণয় করিয়া প্রত্যেক সমবায়ের অন্তর্গত অক্ষর বা অঙ্কগুলিকে বিভিন্ন প্রকারে বিন্যস্ত করিলে কতগুলি বিন্যাস পাওয়া যায়, তাহা দেখা প্রয়োজন। কিন্তু কমিটি গঠন, ইত্যাদি প্রশ্ন কেবল সমবায়ের প্রশ্ন।

7·12. বিভিন্ন বস্তুসমূহের সমবায়ঃ

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক ($r \leqslant n$) করিয়া লইয়া সমবায়ের সংখ্যা নির্ণয়ঃ

মনে কর, সমবায়ের নির্ণেয় সংখ্যা ${}^nC_r = x$.

প্রত্যেক সমবায়ের r-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সবগুলিকে একত্র লইয়া যত প্রকারে সম্ভব বিভিন্ন উপায়ে বিন্যস্ত করিলে প্রতিটি সমবায় হইতে $r!$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ x-সংখ্যক সমবায় হইতে মোট $x \times r!$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

আবার, এই x-সংখ্যক সমবায়ের প্রত্যেকটির অন্তর্গত r-সংখ্যক বস্তুগুলিকে লইয়া যত প্রকারে সম্ভব সাজাইলে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা পাওয়া যায়।

$$\therefore \quad x \times r! = {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

$$\therefore \quad x = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{অর্থাৎ} \quad {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

বিকল্প প্রমাণ (বিন্যাসের সূত্রের সাহায্য না লইয়া):

মনে কর, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ দ্বারা সূচিত করা হইল।

n-সংখ্যক অক্ষর হইতে r-সংখ্যক করিয়া অক্ষর লইয়া সমবায় করিলে ${}^nC_r$টি সমবায় হয় এবং উহাদের প্রত্যেকটি সমবায়ে অক্ষরসংখ্যা r বলিয়া, ${}^nC_r$ সংখ্যক সমবায়ের মোট অক্ষরসংখ্যা $= r \times {}^nC_r$.

আবার, ${}^nC_r$ সংখ্যক সমবায়ের যেগুলির মধ্যে কোন একটি নির্দিষ্ট অক্ষর a_1 থাকিবে, তাহা পাওয়া যাইবে যদি অবশিষ্ট $(n-1)$-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর $a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ হইতে $(r-1)$-সংখ্যক করিয়া অক্ষর লইয়া যতগুলি সমবায় হয়, তাহাদের প্রত্যেকটির সহিত ঐ নির্দিষ্ট অক্ষর a_1-কে যুক্ত করা যায়।

$\therefore$ যে-সমবায়গুলিতে a_1 অক্ষরটি থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $= {}^{n-1}C_{r-1}$,

অর্থাৎ ${}^nC_r$-সংখ্যক সমবায়গুলির ভিতর ${}^{n-1}C_{r-1}$টি a_1 থাকিবে।

অনুরূপভাবে, সমবায়গুলির ভিতর অন্য অক্ষরগুলির প্রত্যেকটিও ${}^{n-1}C_{r-1}$ বার থাকিবে। সুতরাং ঐ ${}^{n}C_r$-সংখ্যক সমবায়ের মোট অক্ষর-সংখ্যা $= n \times {}^{n-1}C_{r-1}$.

$\therefore\ r \times {}^{n}C_r = n \times {}^{n-1}C_{r-1}$.

অথবা $\ {}^{n}C_r = \frac{n}{r} \times {}^{n-1}C_{r-1}$

অনুরূপভাবে, ${}^{n-1}C_{r-1} = \frac{n-1}{r-1} \times {}^{n-2}C_{r-2}$

$${}^{n-2}C_{r-2} = \frac{n-2}{r-2} \times {}^{n-3}C_{r-3}$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$${}^{n-r+2}C_2 = \frac{n-r+2}{2} \times {}^{n-r+1}C_1$$

$${}^{n-r+1}C_1 = \frac{n-r+1}{1}. \qquad [\because\ {}^{n-r}C_0 = 1]$$

এখন, উভয়পক্ষের রাশিগুলিকে স্তম্ভক্রমে গুণ করিয়া এবং গুণফল হইতে সাধারণ উৎপাদকগুলি পরিত্যাগ করিলে,

$${}^{n}C_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots 2.1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1).(n-r)!}{r!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

টীকা: (i) ${}^{n}P_r = {}^{n}C_r \times r!$,

যেহেতু ${}^{n}P_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \times r! = {}^{n}C_r \times r!$.

(ii) ${}^{n}C_1 = n$, কারণ ${}^{n}C_1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$.

(iii) ${}^{n}C_n = 1$, কারণ ${}^{n}C_n = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = 1$.

(iv) ${}^{n}C_0 = 1$, কারণ ${}^{n}C_0 = \frac{n!}{0!.n!} = 1$.

7·13. পূরক (Complementary) সমবায় ঃ

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়ের সংখ্যা এবং n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে $(n-r)$-সংখ্যক করিয়া বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়ের সংখ্যা পরস্পর সমান, অর্থাৎ $C_r = {}^nC_{n-r}$.

সূত্র হইতে,

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ এবং } {}^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}.$$

$$\therefore \quad {}^nC_r = {}^nC_{n-r}.$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া বস্তু লইয়া সমবায়গুলির যে-কোন একটি গঠিত হওয়ায় সঙ্গে সঙ্গে অবশিষ্ট $(n-r)$-সংখ্যক বস্তু পড়িয়া থাকে।

সুতরাং n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়ের সংখ্যা এবং n সংখ্যক বস্তু হইতে $(n-r)$-সংখ্যক করিয়া বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়ের সংখ্যা পরস্পর সমান।

$$\therefore \quad {}^nC_r = {}^nC_{n-r}.$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ ${}^nC_r = {}^nC_s$ হইলে, $r = s$ অথবা $r = n - s$.

এখানে, ${}^nC_r = {}^nC_{n-r} = {}^nC_s$.

${}^nC_r = {}^nC_s$ হইতে $r = s$

এবং ${}^nC_{n-r} = {}^nC_s$ হইতে $n-r = s$, অর্থাৎ $r = n - s$.

$\therefore \quad r = s$ অথবা $r = n - s$.

7·14. ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$.

প্রমাণ ঃ
$${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!\{(n-r+1)+r\}}{r!(n-r+1)!} = \frac{n!.(n+1)}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!\{(n+1)-r\}!} = {}^{n+1}C_r.$$

বিকল্প পদ্ধতি :

$^{n+1}C_r=(n+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া বস্তু লইয়া গঠিত মোট সমবায়ের সংখ্যা

$=$ {একটি নির্দিষ্ট বস্তু কখনই থাকিবে না, এই শর্তে $(n+1)$-সংখ্যক ভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়ের সংখ্যা}

$+$ {ঐ নির্দিষ্ট বস্তুটি সর্বদাই থাকিবে, এই শর্তে $(n+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়ের সংখ্যা}

$={}^nC_r+{}^nC_{r-1}$.

7·15. কয়েকটি বিশেষ শর্তাধীন সমবায় :

(i) n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া বস্তু একযোগে লইয়া গঠিত যে-সমস্ত সমবায়ে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু কখনই থাকিবে না তাহাদের সংখ্যা হইল ${}^{n-p}C_r$, কারণ যে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু কখনই থাকিবে না সেগুলিকে পৃথক করিয়া রাখিলে অবশিষ্ট $(n-p)$-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু ${}^{n-p}C_r$ উপায়ে নির্বাচন করা যায়। এখানে, $p \leqslant r, r \leqslant n$ এবং $r+p \leqslant n$.

(ii) n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া বস্তু একযোগে লইয়া গঠিত যে-সমস্ত সমবায়ে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদাই থাকিবে তাহাদের সংখ্যা হইল ${}^{n-p}C_{r-p}$, কারণ যে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদাই থাকিবে সেগুলিকে পৃথক করিয়া রাখিলে অবশিষ্ট $(n-p)$-সংখ্যক বস্তু হইতে $(r-p)$-সংখ্যক বস্তুকে ${}^{n-p}C_{r-p}$ উপায়ে নির্বাচন করা যায় এবং এই সমস্ত সমবায়ের প্রত্যেকটির সহিত ঐ p-সংখ্যক বস্তু যুক্ত করিলে যে-সমস্ত সমবায়ে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদা থাকিবে তাহা পাওয়া যাইবে। এখানে $p \leqslant r \leqslant n$

7·16. বিভিন্ন বস্তুর সমবায়ের সর্বমোট সংখ্যা :

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে যতগুলি ইচ্ছা বস্তু লইয়া সমবায়ের সর্বমোট সংখ্যা নির্ণয়

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সমবায় গঠন করিলে প্রত্যেক বস্তুর ক্ষেত্রে দুইটি প্রক্রিয়া সম্ভব—বস্তুটি লওয়া হইবে অথবা বস্তুটি লওয়া হইবে না। সুতরাং n-বস্তুর মোট প্রক্রিয়ার সংখ্যা $=2\times2\times2\times\cdots\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত $=2^n$. কিন্তু এই 2^n-সংখ্যক প্রক্রিয়াগুলির ভিতর এরূপ একটি প্রক্রিয়া আছে যাহাতে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর কোণটিকেই লওয়া হয় নাই। কোন বস্তু থাকিবে না, এরূপ সমবায় হইতে পারে না। সুতরাং উহা গ্রহণযোগ্য নহে।

$\therefore$ সমবায়ের নির্ণেয় সংখ্যা $=2^n-1$.

অনুসিদ্ধান্ত : n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে ইচ্ছামত একটি, দুইটি, তিনটি,…
…n-সংখ্যক পর্যন্ত বস্তু লওয়া যায় বলিয়া মোট সমবায়ের সংখ্যা

$$= {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots\cdots + {}^nC_n.$$

$\therefore$ সমবায়ের সর্বমোট সংখ্যা $= {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots\cdots + {}^nC_n = 2^n - 1.$

টীকা : ${}^nP_r = {}^nC_r \times r!.$

সুতরাং ${}^nC_r = \dfrac{{}^nP_r}{r!}.$

আবার, ${}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots\cdots + {}^nC_n = 2^n - 1.$

$$\therefore \frac{{}^nP_1}{1!} + \frac{{}^nP_2}{2!} + \frac{{}^nP_3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{{}^nP_n}{n!} = 2^n - 1.$$

7·17. অভিন্ন বস্তুর সমবায়ের সর্বমোট সংখ্যা :

মোট $(p+q+r+\cdots\cdots)$-সংখ্যক বস্তুর মধ্যে এক প্রকারের অভিন্ন বস্তু p-সংখ্যক, দ্বিতীয় প্রকারের অভিন্ন বস্তু q-সংখ্যক, তৃতীয় প্রকারের অভিন্ন বস্তু r-সংখ্যক, ইত্যাদি আছে। সমস্ত বস্তুগুলি হইতে একযোগে যতগুলি ইচ্ছা বস্তু লইয়া সমবায়ের সর্বমোট সংখ্যা নির্ণয়

প্রথম প্রকারের p-সংখ্যক অভিন্ন বস্তুকে $(p+1)$-সংখ্যক উপায়ে নির্বাচন করা যায়, কারণ ঐ p-সংখ্যক বস্তু হইতে একযোগে 1টি, 2টি, 3টি,……বা p-সংখ্যক বস্তু লওয়া যাইতে পারে অথবা উহাদের কোনটিই না লওয়া যাইতে পারে।

অনুরূপভাবে, q-সংখ্যক অভিন্ন বস্তুকে $(q+1)$-সংখ্যক, r-সংখ্যক অভিন্ন বস্তুকে $(r+1)$-সংখ্যক ইত্যাদি, উপায়ে নির্বাচন করা যাইতে পারে।

এখন, $(p+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন প্রকার নির্বাচনেরপ্রত্যেকটির সহিত$(q+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন প্রকার নির্বাচনের প্রত্যেকটি যুক্ত করা যায় বলিয়া $(p+q)$-সংখ্যক বস্তুকে $(p+1)(q+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন প্রকারে নির্বাচন করা যায়। অনুরূপভাবে, $(p+q+r)$ সংখ্যক বস্তুকে $(p+1)(q+1)(r+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন প্রকারে নির্বাচন করা যায়। এইরূপে, সমস্ত নির্বাচন সংখ্যা হইবে $(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots$, কিন্তু ইহাদের মধ্যে এরূপ একটি নির্বাচন আছে যেখানে সমস্ত বস্তুর কোনটিকেই লওয়া হয় নাই। কোন বস্তু থাকিবে না, এরূপ সমবায় হইতে পারে না। সুতরাং উহা গ্রহণযোগ্য নহে।

$\therefore$ সমবায়ের নির্ণেয় সংখ্যা $= (p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots - 1.$

টীকা : $p=q=r=\cdots\cdots=1$ হইলে, বস্তুগুলি বিভিন্ন হইবে। সেক্ষেত্রে n-সংখ্যক বস্তু হইতে একযোগে 1টি, 2টি, 3টি,……n-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত

মোট সমবায় সংখ্যা $=(1+1)(1+1)(1+1)\ldots\ldots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত -1

$= (2.2.2.\cdots\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত $) - 1 = 2^n - 1.$

ইহাই পূর্বের আলোচনায় পাওয়া গিয়াছে।

7·18. বিভিন্ন দলে বিভাগ ঃ

(*a*) **$(m+n)$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে m-সংখ্যক ও n-সংখ্যক বস্তুর দুইটি দলে যত প্রকারে ভাগ করা যায় তাহার সংখ্যা নির্ণয়**

$(m+n)$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একটি ভাগে m-সংখ্যক বস্তু নির্বাচন করিলে অপর ভাগে n-সংখ্যক বস্তু পড়িয়া থাকে।

এখন, $(m+n)$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে m-সংখ্যক বস্তু ${}^{m+n}C_m$-প্রকারে নির্বাচন করা যায়। m-সংখ্যক বস্তু নির্বাচনের সঙ্গে সঙ্গে প্রতিবার n-সংখ্যক বস্তু অবশিষ্ট থাকে এবং এই অবশিষ্ট n-সংখ্যক বস্তু হইতে একযোগে n-সংখ্যক বস্তু লইয়া অপর ভাগটি নির্বাচন করিতে হইবে। ঐ নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^nC_n = 1$.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় বিভাগ সংখ্যা} = {}^{m+n}C_m \times 1 = \frac{(m+n)!}{m!\,(m+n-m)!} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}.$$

টীকা 1 ঃ প্রথমে n-সংখ্যক বস্তু নির্বাচন করিলেও বিভাগ সংখ্যা একই থাকিবে। সেক্ষেত্রে, নির্বাচন সংখ্যা $= {}^{m+n}C_n \times 1 = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$.

টীকা 2 ঃ $n=m$ হইলে, উভয় দলে সমসংখ্যক বস্তু থাকিবে এবং ইহার ফলে দুই দুইটি করিয়া বিভাগ একই হইবে। সেজন্য এস্থলে বিভিন্ন প্রকারের

বিভাগ সংখ্যা $= \frac{1}{2}.{}^{m+m}C_m = \frac{(2m)!}{2.(m!)^2}$.

কিন্তু, যদি ঐ $2m$-সংখ্যক বস্তুকে দুই ব্যক্তির মধ্যে সমসংখ্যায় ভাগ করিয়া দেওয়া হয়, তাহা হইলে ব্যক্তিদ্বয় ভিন্ন বলিয়া ঐ ব্যক্তিদ্বয় সম্পর্কে দুই দুইটি করিয়া বিভাগ একই নহে। সেজন্য এস্থলে বিভিন্ন প্রকারের বিভাগ-সংখ্যা $= \frac{(2m)!}{(m!)^2}$.

(*b*) **$(m+n+p)$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে m-সংখ্যক, n-সংখ্যক ও p-সংখ্যক বস্তুর তিনটি দলে যত প্রকারে ভাগ করা যায় তাহার সংখ্যা নির্ণয়**

$(m+n+p)$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে m-সংখ্যক বস্তুর একটি দল ${}^{m+n+p}C_m$ প্রকারে নির্বাচন করা যায় এবং অবশিষ্ট $(n+p)$-সংখ্যক বস্তু হইতে n-সংখ্যক বস্তু ${}^{n+p}C_n$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়। এইভাবে লইবার পর অবশিষ্ট p-সংখ্যক বস্তু হইতে p-সংখ্যক বস্তুর একটি দল ${}^pC_p$ প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় বিভাগ-সংখ্যা} = {}^{m+n+p}C_m \times {}^{n+p}C_n \times {}^pC_p$$

$$= \frac{(m+n+p)!}{m!\,(n+p)!} \times \frac{(n+p)!}{n!\,p!} \times 1 = \frac{(m+n+p)!}{m!\,n!\,p!}.$$

টীকা 1 : $p=n=m$ হইলে, তিনটি দলে সমসংখ্যক বস্তু থাকিবে এবং এই তিনটি দল পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিলেও নূতন কোন সমবায় পাওয়া যাইবে না ; কিন্তু উহাদিগকে নিজেদের মধ্যে $3!$ সংখ্যক উপায়ে সাজান যায়।

সুতরাং এস্থলে বিভিন্ন প্রকারের বিভাগ-সংখ্যা $=\dfrac{(3m)!}{(m!)^3 . 3!}$.

কিন্তু যদি ঐ $3m$-সংখ্যক বস্তুকে তিনজন ব্যক্তির মধ্যে সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হয়, তাহা হইলে ব্যক্তিত্রয় বিভিন্ন বলিয়া উহাদের সম্পর্কে ছয় ছয়টি করিয়া বিভাগ একই নহে। সেজন্য এস্থলে বিভিন্ন প্রকারের বিভাগ-সংখ্যা $=\dfrac{(3m)!}{(m!)^3}$.

টীকা 2 : তিনের অধিকভাগে বিভাগ করিবার ক্ষেত্রেও অনুরূপ সূত্র প্রযোজ্য হইবে।

7·19. ^nC_r-এর সর্বোচ্চ মান :

^nC_r-এর সর্বোচ্চ মানের জন্য r-এর মান নির্ণয়

সূত্র হইতে, $^nC_r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{1.2.3.\cdots\cdots(r-1)r}$,

$$^nC_{r-1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{1.2.3.\cdots\cdots(r-1)}.$$

$$\therefore \quad ^nC_r=\frac{n-r+1}{r}\times{}^nC_{r-1}$$

$\therefore$ $^nC_r>=$ অথবা $<{}^nC_{r-1}$ হইবে, যদি $\dfrac{n-r+1}{r}>=$ অথবা <1 হয়,

অর্থাৎ, যদি $n-r+1>=$ অথবা $<r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $n+1>=$ অথবা $<2r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $r<=$ অথবা $>\frac{1}{2}(n+1)$ হয়।

এখন, n যুগ্ম অথবা অযুগ্ম যে-কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইতে পারে।

(i) যদি n যুগ্মসংখ্যা হয়, তাহা হইলে মনে কর, $n=2m$, যেখানে m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$\therefore$ $\frac{1}{2}(n+1)=\frac{1}{2}(2m+1)=m+\frac{1}{2}$.

$\therefore$ $^nC_r>=$ অথবা $<{}^nC_{r-1}$ হইবে, যদি $r<=$ অথবা $>m+\frac{1}{2}$ হয়।

$\therefore$ $r<m+\frac{1}{2}$ হইলে, অর্থাৎ r-এর মান যথাক্রমে $1,2,3,\cdots\cdots m$ হইলে, $^nC_r>{}^nC_{r-1}$ হইবে, অর্থাৎ, $^nC_1>{}^nC_0$, $^nC_2>{}^nC_1,\cdots\cdots{}^nC_m>{}^nC_{m-1}$

হইবে, অর্থাৎ $^nC_1$, $^nC_2$,……^nC_m-এর প্রত্যেকটি উহার পূর্ববর্তীটি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

r অখণ্ডরাশি বলিয়া, $r=m+\frac{1}{2}$ হইতে পারে না।

আবার, $r>m+\frac{1}{2}$ হইলে, অর্থাৎ r-এর মান যথাক্রমে $m+1$, $m+2$, $m+3$,……হইলে, $^nC_r<{}^nC_{r-1}$ হইবে,

অর্থাৎ $^nC_{m+1}<{}^nC_m$, $^nC_{m+2}<{}^nC_{m+1}$,…… হইবে।

সুতরাং ^nC_m, $^nC_{m+1}$, $^nC_{m+2}$,……এর প্রত্যেকটি উহার পরবর্তীটি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

$\therefore$ $^nC_1$, $^nC_2$,……^nC_m, $^nC_{m+1}$,……এর ভিতর ^nC_m-এর মান সর্বোচ্চ।

সুতরাং n যুগ্ম হইলে, ^nC_r-এর মান সর্বোচ্চ হইবে, যদি $r=m=\frac{1}{2}n$ হয়।

(ii) যদি n অযুগ্মসংখ্যা হয়, তাহা হইলে মনে কর, $n=2m+1$, যেখানে m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$\therefore$ $\frac{1}{2}(n+1)=\frac{1}{2}(2m+1+1)=m+1$.

$\therefore$ $^nC_r>=$ অথবা $<{}^nC_{r-1}$ হইবে, যদি $r<=$ অথবা $>m+1$ হয়।

$\therefore$ $r<m+1$ হইলে, অর্থাৎ r-এর মান যথাক্রমে $1, 2, 3, \cdots m$ হইলে, $^nC_r>{}^nC_{r-1}$ হইবে, অর্থাৎ $^nC_1>{}^nC_0$, $^nC_2>{}^nC_1$,……$^nC_m>{}^nC_{m-1}$ হইবে, অর্থাৎ $^nC_1$, $^nC_2$,……^nC_m-এর প্রত্যেকটি উহার পূর্ববর্তীটি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

$r=m+1$ হইলে, $^nC_r={}^nC_{r-1}$ হইবে, অর্থাৎ $^nC_{m+1}={}^nC_m$ হইবে।

আবার, $r>m+1$ হইলে, অর্থাৎ r-এর মান যথাক্রমে $m+2$, $m+3$,…… হইলে, $^nC_r<{}^nC_{r-1}$ হইবে,

অর্থাৎ $^nC_{m+2}<{}^nC_{m+1}$, $^nC_{m+3}<{}^nC_{m+2}$,……হইবে,

অর্থাৎ $^nC_{m+1}$, $^nC_{m+2}$, $^nC_{m+3}$……এর প্রত্যেকটি উহার পরবর্তীটি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

$\therefore$ $^nC_1$, $^nC_2$,……^nC_m, $^nC_{m+1}$,……এর ভিতর $^nC_m(={}^nC_{m-1})$-এর মান সর্বোচ্চ।

সুতরাং n-অযুগ্ম হইলে, ^nC_r-এর মান সর্বোচ্চ হইবে, যদি $r=m=\frac{1}{2}(n-1)$ এবং $r=m+1=\frac{1}{2}(n+1)$ হয়।

7·20. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. $^{15}C_{11}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$^{15}C_{11}=\frac{15!}{11!.(15-11)!}=\frac{15\times14\times13\times12\times11!}{11!\times4!}=\frac{15\times14\times13\times12}{4\times3\times2\times1}.$$

$$=1365.$$

উদাহরণ 2. $^nP_r=336$ এবং $^nC_r=56$ হইলে, n এবং r-এর মান নির্ণয় কর।

[W.B.B.H.S.]

সূত্র হইতে, $^nP_r=r!\times{}^nC_r$.

$\therefore\ r!=\frac{^nP_r}{^nC_r}=\frac{336}{56}=6=3.2.1=3!.$

$\therefore\ r=3.$

আবার, $^nP_r=336$

$\therefore\ {}^nP_3=336$

অথবা, $\frac{n!}{(n-3)!}=n(n-1)(n-2)=336$

অথবা, $n^3-3n^2+2n-336=0$

অথবা, $(n-8)(n^2+5n+42)=0.$

$\therefore\ n=8,\frac{-5\pm\sqrt{25-168}}{2}=8,\frac{1}{2}(-5\pm i\sqrt{143}).$

যেহেতু n কাল্পনিক নহে, সুতরাং $n=8$.

উদাহরণ 3. প্রমাণ কর যে, $^{n-2}C_r+2.{}^{n-2}C_{r-1}+{}^{n-2}C_{r-2}={}^nC_r$.

বামপক্ষ $=({}^{n-2}C_r+{}^{n-2}C_{r-1})+({}^{n-2}C_{r-1}+{}^{n-2}C_{r-2})$

$={}^{n-2+1}C_r+{}^{n-2+1}C_{r-1}$ $[\because {}^nC_r+{}^nC_{r-1}={}^{n+1}C_r]$

$={}^{n-1}C_r+{}^{n-1}C_{r-1}$

$={}^{n-1+1}C_r={}^nC_r=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 4. 10টি প্রশ্ন হইতে 6টি প্রশ্ন কত প্রকারে উত্তর করা যায়?

10টি প্রশ্ন হইতে একযোগে 6টি করিয়া লইয়া যত প্রকারে নির্বাচন করা যায়, তাহাই হইবে নির্ণেয় সমবায়ের সংখ্যা।

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায়ের সংখ্যা $={}^{10}C_6=\frac{10!}{6!.(10-6)!}=\frac{10\times9\times8\times7\times6!}{6!\times4!}$

$$=\frac{10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4}=210.$$

উদাহরণ 5. একটি দশভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি যোগ করিলে কতগুলি ত্রিভুজ পাওয়া সম্ভব ? দশভুজটির কতগুলি কর্ণ আছে ? [B.U.Ent.]

দশভুজের দশটি কৌণিকবিন্দুর যে-কোন তিনটি যোগ করিলে একটি ত্রিভুজ পাওয়া যায়। সুতরাং নির্ণেয় ত্রিভুজের সংখ্যা $= {}^{10}C_3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!}$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 120.$$

দশভুজের দশটি কৌণিক বিন্দুর যে-কোন দুইটি যোগ করিলে মোট ${}^{10}C_2$টি সরলরেখা পাওয়া যায়। ইহার মধ্যে দশভুজের দশটি বাহু আছে এবং ঐ বাহুগুলি কর্ণ নয়। সুতরাং নির্ণেয় কর্ণের সংখ্যা $= {}^{10}C_2 - 10 = \frac{10 \times 9}{2} - 10 = 35.$

উদাহরণ 6. 17টি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 5টি স্বরবর্ণ হইতে একযোগে 3টি করিয়া ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 2টি করিয়া স্বরবর্ণ লইয়া কয়টি শব্দ গঠন করা যায় ?

17টি ব্যঞ্জনবর্ণ হইতে একযোগে 3টি করিয়া লইয়া নির্বাচন করা যায় ${}^{17}C_3$ প্রকারে। 5টি স্বরবর্ণ হইতে একযোগে 2টি করিয়া লইয়া নির্বাচন করা যায় ${}^{5}C_2$ প্রকারে।

সুতরাং প্রথমোক্ত প্রত্যেকটি সমবায়ের সহিত শেষোক্ত প্রত্যেকটি সমবায় মিলিত করিলে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 2টি স্বরবর্ণ, মোট 5টি বর্ণের $({}^{17}C_3 \times {}^{5}C_2)$টি সমবায় হইবে।

এখন প্রত্যেকটি সমবায়ের 5টি বর্ণকে একযোগে লইয়া বিন্যাস করিলে প্রত্যেকবার একটি করিয়া নূতন শব্দ পাওয়া যাইবে এবং ঐ 5টি বর্ণের বিন্যাস-সংখ্যা $= 5!$.

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দসংখ্যা $= {}^{17}C_3 \times {}^{5}C_2 \times 5!$

$$= \frac{17 \times 16 \times 15}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{5 \times 4}{1 \times 2} \times 120 = 816000.$$

উদাহরণ 7. 15 জন লোকের একটি দল হইতে 9 জনকে কত প্রকারে নির্বাচন করা যায়, যাহাতে (i) নির্দিষ্ট 3 জন লোক কখনই থাকিবে না, (ii) নির্দিষ্ট 3 জন লোক সর্বদা থাকিবে ? [W.B.B.H.S]

(i) যদি প্রত্যেক নির্বাচনে নির্দিষ্ট 3 জন লোক না থাকে, তাহা হইলে 15 জন হইতে ঐ 3 জনকে বাদ দিয়া অবশিষ্ট 12 জন হইতে 9 জনকে নির্বাচন করিতে হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায়ের সংখ্যা $= {}^{12}C_9 = \frac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 220.$

(ii) যদি প্রত্যেক নির্বাচনে নির্দিষ্ট 3 জন লোক থাকে, তাহা হইলে 15 জন হইতে ঐ 3 জনকে বাদ দিয়া অবশিষ্ট 12 জন হইতে (9 – 3) অথবা 6 জনকে নির্বাচন করিতে হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায়ের সংখ্যা $= {}^{12}C_6 = \dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 924.$

উদাহরণ 8. 6 জন পুরুষ এবং 4 জন মহিলার মধ্যে 5 জনের একটি কমিটি গঠন করিতে হইবে। কমিটিতে অন্ততঃপক্ষে একজন মহিলা থাকিবে এরূপ কতগুলি কমিটি হইতে পারে ?

যেহেতু কমিটিতে মোট 5 জনের মধ্যে অন্ততঃ 1 জন মহিলা থাকিবে, সুতরাং ঐ কমিটি নিম্নলিখিতভাবে গঠিত হইতে পারে ঃ

(*a*) 1 জন মহিলা ও 4 জন পুরুষ ;

(*b*) 2 জন মহিলা ও 3 জন পুরুষ ;

(*c*) 3 জন মহিলা ও 2 জন পুরুষ

অথবা (*d*) 4 জন মহিলা ও 1 জন পুরুষ।

(*a*) এইক্ষেত্রে 4জন মহিলার মধ্যে 1 জনকে এবং 6 জন পুরুষের মধ্যে 4 জনকে নির্বাচন করিতে হইবে।

$\therefore$ সমবায়-সংখ্যা $= {}^4C_1 \times {}^6C_4 = 4 \times \dfrac{6 \times 5}{2} = 60.$

(*b*) এইক্ষেত্রে 4 জন মহিলার মধ্যে 2 জনকে এবং 6 জন পুরুষের মধ্যে 3 জনকে নির্বাচন করিতে হইবে।

$\therefore$ সমবায়-সংখ্যা $= {}^4C_2 \times {}^6C_3 = \dfrac{4 \times 3}{2} \times \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 120.$

(*c*) এইক্ষেত্রে 4 জন মহিলার মধ্যে 3 জনকে এবং 6 জন পুরুষের মধ্যে 2 জনকে নির্বাচন করিতে হইবে।

$\therefore$ সমবায়-সংখ্যা $= {}^4C_3 \times {}^6C_2 = 4 \times \dfrac{6 \times 5}{2} = 60.$

(*d*) এইক্ষেত্রে 4 জন মহিলার মধ্যে 4 জনকে এবং 6 জন পুরুষের মধ্যে 1 জনকে নির্বাচন করিতে হইবে।

$\therefore$ সমবায়-সংখ্যা $= {}^4C_4 \times {}^6C_1 = 1 \times 6 = 6.$

$\therefore$ নির্ণেয় মোট কমিটির সংখ্যা $= 60 + 120 + 60 + 6 = 246.$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ পুরুষ ও মহিলা মোট $6 + 4 = 10$ জন। এই 10 জন হইতে 5 জন করিয়া নির্বাচিত করিলে নির্বাচন-সংখ্যা হয় ${}^{10}C_5$ এবং এই নির্বাচনগুলির ভিতর যতগুলিতে একটি মহিলাও থাকিবে না, তাহাদের সংখ্যা ${}^6C_5$.

$\therefore$ নির্ণেয় কমিটির সংখ্যা $= {}^{10}C_5 - {}^6C_5 = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} - 6 = 246.$

উদাহরণ 9. দুইটি বিভাগে 5টি করিয়া মোট 10টি প্রশ্ন আছে। কোন বিভাগ হইতে 4টির অধিক প্রশ্নের উত্তর না করিয়া একজন পরীক্ষার্থী কত রকমভাবে মোট 6টি প্রশ্নের উত্তর করিতে পারিবে ?

প্রদত্ত শর্তানুসারে, পরীক্ষার্থী 6টি প্রশ্ন নিম্নলিখিতভাবে নির্বাচন করিতে পারে :

(a) প্রথম বিভাগ হইতে 4টি এবং দ্বিতীয় বিভাগ হইতে 2টি ;

(b) প্রথম বিভাগ হইতে 3টি এবং দ্বিতীয় বিভাগ হইতে 3টি

অথবা (c) প্রথম বিভাগ হইতে 2টি এবং দ্বিতীয় বিভাগ হইতে 4টি।

(a)-এর ক্ষেত্রে নির্বাচন-সংখ্যা $= {}^5C_4 \times {}^5C_2 = 5 \times \dfrac{5 \times 4}{2} = 50$;

(b)-এর ক্ষেত্রে নির্বাচন-সংখ্যা $= {}^5C_3 \times {}^5C_3 = \dfrac{5 \times 4}{2} \times \dfrac{5 \times 4}{2} = 100$;

এবং (c)-এর ক্ষেত্রে নির্বাচন-সংখ্যা $= {}^5C_2 \times {}^5C_4 = \dfrac{5 \times 4}{2} \times 5 = 50.$

$\therefore$ প্রশ্ন নির্বাচনের নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 50 + 100 + 50 = 200.$

উদাহরণ 10. 2520-এর বিভিন্ন উৎপাদকের সংখ্যা নির্ণয় কর।

মৌলিক উৎপাদকে বিভক্ত করিলে, $2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7.$

সুতরাং 2520-এর সাতটি উৎপাদকের ভিতর 3টি 2, 2টি 3 এবং বাকী 2টি বিভিন্ন ; সুতরাং উহাদের দ্বারা গঠিত নির্ণেয় উৎপাদকগুলির সংখ্যা

$= (2+1)(3+1)(1+1)(1+1) - 1$ [অনুচ্ছেদ 7·17 হইতে]

$= 3.4.2.2 - 1 = 47.$

উদাহরণ 11. 9টি বিভিন্ন পুতুল হইতে সমবায়ের বৃহত্তম সংখ্যা নির্ণয় কর। পুতুলের সংখ্যা আর একটি বেশী হইলে সমবায়ের বৃহত্তম সংখ্যা কত হইবে ?

${}^9C_r$-এর মান বৃহত্তম হইবে, যখন $r = \frac{1}{2}(9 \pm 1) = 5, 4.$ [অনুচ্ছেদ 7·19 হইতে]

$\therefore$ সমবায়ের বৃহত্তম সংখ্যা $= {}^9C_5 = {}^9C_4 = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 126.$

আর একটি পুতুল বেশী হইলে পুতুলের সংখ্যা হয় $9 + 1 = 10.$

${}^{10}C_r$-এর মান বৃহত্তম হইবে, যখন $r = \frac{1}{2} \times 10 = 5.$

$\therefore$ সমবায়ের বৃহত্তম সংখ্যা $= {}^{10}C_5 = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 252.$

উদাহরণ 12. 'IMPRESSION' শব্দটির অক্ষরগুলি হইতে একযোগে 4টি করিয়া অক্ষর কতপ্রকারে নির্বাচন করা যায় এবং কত প্রকারে বিন্যাস করা যায় ?

প্রদত্ত শব্দটিতে 8 প্রকারের 10টি অক্ষর আছে ; যথা, (I, I), (S, S), (M, P, R, E, O, N) ; উহাদের মধ্যে 4টি করিয়া অক্ষর নিম্নলিখিতভাবে নির্বাচন করা যায় :—

(a) দুইটি একই প্রকার অক্ষর, দুইটি অন্য একই প্রকার অক্ষর ;

(b) দুইটি একই প্রকার অক্ষর আবার দুইটি বিভিন্ন অক্ষর ;

অথবা (c) চারিটি অক্ষরই বিভিন্ন প্রকার।

(a)-এর ক্ষেত্রে নির্বাচনের সংখ্যা $=1$,

কারণ এখানে দুইজোড়া একই অক্ষর হইতে দুইজোড়া একই অক্ষর নির্বাচন করিতে হইবে।

(b)-এর ক্ষেত্রে নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^2C_1 \times {}^7C_2 = 2 \times \frac{7 \times 6}{2} = 42$,

কারণ, এখানে দুইজোড়া একই অক্ষর হইতে একজোড়া এবং অপর 7টি বিভিন্ন প্রকারের অক্ষর হইতে দুইটি অক্ষর নির্বাচন করিতে হইবে।

(c)-এর ক্ষেত্রে নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^8C_4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 70$,

কারণ, এখানে 8 প্রকারের অক্ষর হইতে 4টি অক্ষর নির্বাচন করিতে হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট নির্বাচনের সংখ্যা $= 1 + 42 + 70 = \mathbf{113}$.

মোট বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য উপরের তিনটি শ্রেণীর অন্তর্গত প্রত্যেকটি নির্বাচনের 4টি অক্ষরকে যতপ্রকারে সম্ভব বিন্যাস করিতে হইবে।

(a)-এর ক্ষেত্রে বিন্যাসের সংখ্যা $= \frac{4\,!}{2\,!\,2\,!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$.

(b)-এর ক্ষেত্রে বিন্যাসের সংখ্যা $= 42 \times \frac{4\,!}{2\,!} = 42 \times \frac{4 \times 3}{1} = 504$.

(c)-এর ক্ষেত্রে বিন্যাসের সংখ্যা $= 70 \times 4\,! = 70 \times 24 = 1680$,

$\therefore$ নির্ণেয় মোট বিন্যাসের সংখ্যা $= 6 + 504 + 1680 = \mathbf{2190}$.

প্রশ্নমালা VII (B)

1. $^{12}C_9$ এবং $^{16}C_{12}$-এর মান নির্ণয় কর।

2. (i) $^{2n}C_3 : {}^nC_2 = 44 : 3$ হইলে, n-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $^nC_r : {}^nC_{r+1} : {}^nC_{r+2} = 2 : 3 : 4$ হইলে, n এবং r-এর মান নির্ণয় কর।

3. (i) $^nC_{16} = {}^nC_5$ হইলে, n-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $^nC_{10} = {}^nC_{15}$ হইলে, $^{27}C_n$-এর মান নির্ণয় কর।

(iii) $^{2n}C_r = {}^{2n}C_{r+2}$ হইলে, r-এর মান নির্ণয় কর।

4. (i) $^nP_r = 1680$ এবং $^nC_r = 70$ হইলে, n এবং r-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $^nP_r = {}^nP_{r+1}$ এবং $^nC_r = {}^nC_{r-1}$ হইলে, n এবং r-এর মান নির্ণয় কর।

(iii) $^nP_r = 120.\ {}^nC_{n-r}$ হইলে, r-এর মান নির্ণয় কর।

5. $m = {}^nC_2$ হইলে, দেখাও যে, $^mC_2 = 3 \times {}^{n+1}C_4$.

6. প্রমাণ কর যে,

(i) $^nC_{r+1} + 2.\,{}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+2}C_{r+1}$.

(ii) $^nC_r + 3.\,{}^nC_{r-1} + 3.\,{}^nC_{r-2} + {}^nC_{r-3} = {}^{n+3}C_r$.

(iii) $\dfrac{^{4n}C_{2n}}{^{2n}C_n} = \dfrac{1.3.5\cdots\cdots(4n-1)}{\{1.3.5\cdots\cdots(2n-1)\}^2}$.

7. 12টি প্রশ্ন হইতে 6টি প্রশ্ন কতপ্রকারে উত্তর করা যায়?

8. n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি বহুভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি যোগ করিলে কতগুলি ত্রিভুজ পাওয়া যায়? বহুভুজটির কতগুলি কর্ণ আছে?

9. স্বরাজদলের 9 জন এবং মন্ত্রীদলের 5 জন হইতে স্বরাজদলের 6 জন এবং মন্ত্রীদলের 2 জন থাকিবে এরূপ কতগুলি কমিটি গঠন করা যায়?

10. কোন পরিষদের 8 জন নির্বাচিত এবং 5 জন সরকার মনোনীত সদস্যদের মধ্য হইতে 7 জনকে লইয়া মোট কয়টি বিভিন্ন কমিটি গঠন করা সম্ভব?

[C.U.B. Com.]

11. দেখাও যে, $^{2n}C_n$-এ একটি নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদা থাকিবে এরূপ সমবায়ের সংখ্যা, ঐ নির্দিষ্ট বস্তুটি কখনই থাকিবেনা এরূপ সমবায়ের সংখ্যার সমান। [B.U.Ent.]

12. 15 জন বালকের মধ্যে 7 জন স্কাউট আছে, উহাদের মধ্য হইতে 12 জন বালককে কত রকমে নির্বাচন করা যায়, যাহাতে প্রত্যেক নির্বাচনে

(i) ঠিক 6 জন স্কাউট থাকে, (ii) অন্ততঃপক্ষে 6 জন স্কাউট থাকে?

13. 900 জন সৈন্যের মধ্য হইতে 80 জনকে কত রকমভাবে নির্বাচন করা যায়, যাহাতে নির্দিষ্ট 10 জন সৈন্য সর্বদা বাদ পড়ে?

[W. B. B. H. S.]

14. 10 জন ছাত্র এবং 6 জন ছাত্রীর মধ্যে 10 জনের একটি কমিটি গঠন করিতে হইবে। কমিটিতে অন্ততঃপক্ষে 4 জন ছাত্রী থাকিলে এরূপ কতগুলি কমিটি গঠিত হইতে পারে? [B.U.B. Com.]

15. 8 জন স্ত্রীলোক এবং 7 জন পুরুষের মধ্য হইতে 3 জন স্ত্রীলোক এবং 4 জন পুরুষ লইয়া কতভাবে কমিটি গঠন করা যাইতে পারে? Mr. Y থাকিলে যদি Mrs. X কমিটিতে থাকিতে অস্বীকার করেন, তবে ঐ সংখ্যা কত হইবে?

[C.U.B. Com.]

16. একটি প্রশ্নপত্রে 11টি প্রশ্ন দেওয়া হইল। কত বিভিন্ন উপায়ে 6টি প্রশ্নের উত্তর দেওয়া যায়? যদি 11 নম্বর প্রশ্ন আবশ্যিক হিসাবে গণ্য করা যায়, তবে মোট 6টি প্রশ্ন কত উপায়ে নির্বাচন করা যায়? [C.U.B. Com.]

17. কোন প্রশ্নপত্রের A-বিভাগে 5টি, B-বিভাগে 4টি এবং C-বিভাগে 3টি প্রশ্ন আছে। কত রকম ভাবে A-বিভাগ হইতে 3টি, B-বিভাগ হইতে 2টি এবং C-বিভাগ হইতে 1টি প্রশ্নের উত্তর করিয়া মোট 6টি প্রশ্নের উত্তর করা যায়?

[B.U.B Com.]

18. কোন প্রশ্নপত্রে 12টি প্রশ্ন দেওয়া হইয়াছে। তন্মধ্যে A-বিভাগে 7টি ও B-বিভাগে 5টি প্রশ্ন রহিয়াছে। প্রশ্নগুলি 1 হইতে 12 পর্যন্ত পর পর রহিয়াছে। A-বিভাগ হইতে চতুর্থ প্রশ্ন ও অপর যে-কোন 3টি প্রশ্ন এবং B-বিভাগ হইতে অষ্টম প্রশ্ন ও অপর যে-কোন দুইটি প্রশ্নের উত্তর করিতে হইবে। কোন পরীক্ষার্থী কত প্রকারে প্রশ্ন চয়ন করিতে পারে, নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

19. এক নির্বাচনে 5 জন প্রার্থীর 3 জনকে নির্বাচন করিতে হইবে এবং যতজন জনকে নির্বাচন করিতে হইবে একজন ভোটদাতা তাহার অনধিক যে-কোন সংখ্যক প্রার্থীকে ভোট দিতে পারেন। একজন ভোট দাতা কত প্রকারে ভোট দিতে পারেন?

20.(*a*) ইংলণ্ডের বিপক্ষে প্রথম টেষ্ট খেলিবার জন্য প্রাথমিক ভাবে ভারতের পক্ষে মোট 17 জন খেলোয়াড় নির্বাচিত হইল। উহার মধ্যে 2জন উইকেট-রক্ষক, 6 জন ব্যাটস্ম্যান, 6 জন বোলার এবং বাকী 3 জন অল্-রাউণ্ডার আছে। উহাদের

মধ্য হইতে কতরকমভাবে 11 জনের দল গঠন করা যাইবে যাহাতে দলে 1 জন উইকেট-রক্ষক, 5 জন ব্যাটস্‌ম্যান, 1 জন অল্‌রাউণ্ডার এবং 4 জন বোলার থাকিবে ?

(b) একটি নৌকার 8 জন মাঝির মধ্যে 3 জন নৌকার কেবল একপার্শ্বে এবং 2 জন কেবল অপর পার্শ্বে দাঁড় টানিতে পারে। কত প্রকারে ঐ মাঝিদিগকে দুই পার্শ্বে সমভাবে সাজান যাইবে ?

21. একটি সমতলে অবস্থিত n-সংখ্যক বিন্দুর m-সংখ্যক ভিন্ন অন্যবিন্দুগুলির যে-কোন তিনটি সমরেখ নহে। ঐ n-সংখ্যক বিন্দুর সাহায্যে যতগুলি সরলরেখা অঙ্কন করা যায়, তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় কর। উহাদের সাহায্যে কতগুলি ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় ?

22. কলিকাতার সিনিয়ার ডিভিসন ফুটবল লীগের খেলায় তোমার প্রিয়দলের আরো দশটি খেলা বাকী আছে। ঐ দশটি খেলার ভবিষ্যৎ সম্বন্ধে (জয়, পরাজয় অথবা ড্র) তোমাকে বলিতে হইবে। তুমি কতরকম ভবিষ্যৎবাণী করিতে পার, যাহাতে ঠিক ছয়টি খেলার ফলের সহিত তোমার ভবিষ্যৎবাণী মিলিবে ?

23. 14টি দ্রব্যের মধ্যে 10টি দ্রব্য একই প্রকারের এবং অন্যগুলির প্রত্যেকটি ভিন্ন প্রকারের। ঐ দ্রব্যগুলি হইতে 10টি করিয়া লইয়া কতগুলি সমবায় গঠন করা যাইতে পারে, তাহা নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

24.(a) 210-এর কতগুলি বিভিন্ন উৎপাদক আছে ?

(b) 15750-এর বিভিন্ন উৎপাদকের সংখ্যা নির্ণয় কর।

(c) 2, 3, 5, 7 ও 11-এর সাহায্যে কতগুলি গুণফল পাওয়া যাইতে পারে ?

[গুণফল পাইতে হইলে অন্ততঃ 2টি অঙ্কের প্রয়োজন]

25. আটটি প্রশ্ন এবং প্রত্যেকটির একটি করিয়া বিকল্প প্রশ্ন আছে। প্রমাণ কর যে, এক বা একাধিক প্রশ্ন মোট $(3^8 - 1)$-প্রকারে নির্বাচন করা যায়।

26.(a) তোমার কাছে তিনটি 1 টাকার মুদ্রা, পাঁচটি আধুলি এবং ছয়টি সিকি আছে। তুমি কত প্রকারে একটি দাতব্য ফাণ্ডে কিছু চাঁদা দিতে পার ?

(b) 5টি আম, 4টি লেবু এবং 3টি আপেলের মধ্যে প্রত্যেক রকম ফলের অন্ততঃ একটি থাকিবে এরূপে কতগুলি সমবায় করা যায় ? একই প্রকার ফলগুলির আকৃতি বিভিন্ন হইলে সমবায়ের সংখ্যা কত হইবে ?

27. কত প্রকারে 22 জন খেলোয়াড়কে পরস্পরের বিরুদ্ধে খেলিবার জন্য দুইটি ক্রিকেট দলে বিভক্ত করা যায় ?

[অনুচ্ছেদ 7·18-এর টীকা 2-এর অনুসরণ কর]

28. 4 জন বালকের মধ্যে 12টি কলা কতপ্রকারে সমানভাবে ভাগ করা যায় ? কলাগুলি বিভিন্ন আকৃতির হইলে কত প্রকারে সমানভাবে ভাগ করা যায় ?

29. (a) 52টি তাস 4 জন খেলোয়াড়ের মধ্যে কত প্রকারে বণ্টন করা যায়, যাহাতে প্রত্যেকে 13টি করিয়া তাস পায় ?

(b) p-সংখ্যক ছাত্রের মধ্যে pq-সংখ্যক বই কতপ্রকারে সমানভাবে ভাগ করা যায় ?

30. (a) প্রতিদলে সমান সংখ্যক লোক রাখিয়া 13 জন লোক হইতে সর্বোচ্চ কতগুলি দল গঠন করা যায় ? ঐ 13 জনের একজনের মৃত্যু ঘটিলে সর্বোচ্চ কতগুলি দল গঠন করা যাইবে ? শেষোক্ত ক্ষেত্রে প্রতি দলে কতজন লোক থাকিবে ?

(b) দেখাও যে, ${}^{2n}C_r$-এর সর্বোচ্চ মান ${}^{2n-1}C_r$-এর সর্বোচ্চ মানের দ্বিগুণ।

31. 'SUCCESSIVE' শব্দটির অক্ষরগুলি হইতে একযোগে 4টি করিয়া অক্ষর কত প্রকারে নির্বাচন করা যায় এবং কত প্রকারে বিন্যাস করা যায় ?

32. দেখাও যে, 'DADDY DID A DEADLY DEED'-এর অক্ষরগুলি হইতে মোট 1919 সংখ্যক নির্বাচন করা যায়।

অষ্টম অধ্যায়

দ্বিপদ উপপাদ্য

(Binomial Theorem)

A. ধনাত্মক অখণ্ড সূচক

8·1. যে-রাশিতে দুইটি পদ থাকে, তাহাকে **দ্বিপদ রাশি** (Binomial Expression) বলে। উদাহরণস্বরূপ, $x+a$, $2x-3y$, ইত্যাদি, হইল দ্বিপদ রাশি।

যে-বীজগণিতীয় সাধারণ সূত্রের সাহায্যে একটি দ্বিপদ রাশির যে-কোন ঘাতকে বা মূলকে একটি শ্রেণীর আকারে প্রকাশ করা যায়, তাহাকে **দ্বিপদ উপপাদ্য** (Binomial Theorem) বলে এবং শ্রেণীটিকে দ্বিপদরাশিটির ঐ ঘাতের বা মূলের **বিস্তৃতি** (Expansion) বলে।

স্যার আইজ্যাক নিউটন এই উপপাদ্যটি আবিষ্কার করেন।

8·2. ধনাত্মক অখণ্ড সূচকের ক্ষেত্রে দ্বিপদ উপপাদ্য ঃ

n-ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি নির্ণয়

n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$(a+x)^n=a^n+{}^nC_1a^{n-1}x+{}^nC_2a^{n-2}x^2+\cdots+{}^nC_ra^{n-r}x^r+\cdots+x^n \quad \cdots \quad (1)$$

$$=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}x^r+\cdots+x^n. \quad \cdots \quad (2)$$

প্রকৃতপক্ষে, $(a+x)^n=(a+x)(a+x)\cdots\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত।

ডানপক্ষের n-সংখ্যক উৎপাদকের ক্রমিক গুণফলের প্রত্যেকটি পদ ঐ n-সংখ্যক উৎপাদকের প্রত্যেকটি হইতে একটি করিয়া অক্ষর লইয়া এবং সেই n-সংখ্যক অক্ষরকে একসঙ্গে গুণ করিয়া পাওয়া যাইবে। সুতরাং ক্রমিক গুণফলের প্রত্যেক পদে a ও x-এর ঘাতের সূচকদ্বয়ের সমষ্টি n অর্থাৎ প্রত্যেকটি পদ n-মাত্রাবিশিষ্ট।

প্রত্যেক উৎপাদক হইতে x না লইয়া কেবল a লইলে n সংখ্যক a পাওয়া যায়। ইহাদের গুণফল a^n এবং ইহাই বিস্তৃতির প্রথম পদ। অনুরূপভাবে, প্রত্যেক উৎপাদক হইতে a না লইয়া কেবল x লইলে n-সংখ্যক x পাওয়া যায়। ইহাদের গুণফল x^n এবং ইহাই বিস্তৃতির শেষ পদ।

এখন যদি কোন পদে r-সংখ্যক x থাকে, তবে ঐ পদে $(n-r)$-সংখ্যক a থাকিবে। $a^{n-r}x^r$ কত সংখ্যকবার থাকিবে তাহা, n-সংখ্যক x হইতে r-সংখ্যক x এবং $(n-r)$-সংখ্যক a হইতে $(n-r)$-সংখ্যক a যত সংখ্যক উপায়ে নির্বাচন করা যায়, তাহার সমান। n-সংখ্যক x হইতে r-সংখ্যক x নির্বাচন করা যায় ${}^nC_r$ প্রকারে এবং তারপর $(n-r)$-সংখ্যক a হইতে $(n-r)$-সংখ্যক a নির্বাচন করা যায় ${}^{n-r}C_{n-r}$ বা 1 প্রকারে। স্থতরাং ক্রমিক গুণফলটিতে $a^{n-r}x^r$ থাকিবে ${}^nC_r \times 1 = {}^nC_r$ সংখ্যক বার অর্থাৎ $a^{n-r}x^r$-এর সহগ হইবে ${}^nC_r$. অতএব যে-কোন একটি পদের সাধারণ আকার হইবে ${}^nC_r a^{n-r}x^r$.

ইহাতে $r=0,1,2,\ldots\ldots, n$ পরপর বসাইলে, সমস্ত পদগুলিই পাওয়া যাইবে এবং পদগুলি হইবে $a^n, {}^nC_1a^{n-1}x, {}^nC_2a^{n-2}x^2, \ldots\ldots, {}^nC_ra^{n-r}x^r, \ldots\ldots, x^n$
$[\because \ {}^nC_0 = {}^nC_n = 1]$.

$$\therefore \quad (a+x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + \cdots\cdots + {}^nC_ra^{n-r}x^r + \cdots\cdots + x^n$$

$$= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}x^r + \cdots\cdots + x^n.$$

বিকল্প পদ্ধতিঃ আরোহী প্রণালী (Method of Induction)

সাধারণ নিয়মে গুণ করিয়া,

$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + {}^2C_1ax + x^2$;

$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = a^3 + {}^3C_1a^2x + {}^3C_2ax^2 + x^3$.

স্থতরাং দেখা যাইতেছে যে, $n=2$ এবং 3 হইলে, উপপাদ্যটির সত্যতা প্রমাণিত হয়।

এখন মনে কর, n-এর যে-কোন একটি মান m হইলে উপপাদ্যটির সত্যতা বর্তমান থাকে। তাহা হইলে,

$$(a+x)^m = a^m + {}^mC_1a^{m-1}x + {}^mC_2a^{m-2}x^2 + \cdots + {}^mC_ra^{m-r}x^r + \cdots + x^m.$$

উভয়পক্ষকে $(a+x)$ দ্বারা গুণ করিলে,

$$(a+x)^{m+1} = (a+x)\ a^m + {}^mC_1a^{m-1}x + {}^mC_2a^{m-2}x^2 + \cdots + {}^mC_ra^{m-r}x^r + \cdots + x^m)$$

$$= a^{m+1} + ({}^mC_1 + 1)a^mx + ({}^mC_2 + {}^mC_1)a^{m-1}x^2 + \cdots\cdots + ({}^mC_r + {}^mC_{r-1})a^{m-r+1}x^r + \cdots + x^{m+1}$$

$$= a^{m+1} + {}^{m+1}C_1a^mx + {}^{m+1}C_2a^{m-1}x^2 + \cdots + {}^{m+1}C_ra^{m-r+1}x^r + \cdots + x^{m+1}$$

$[\because {}^mC_1 + 1 = m+1 = {}^{m+1}C_1$ এবং সাধারণভাবে ${}^mC_r + {}^mC_{r-1} = {}^{m+1}C_r.]$

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, $n=m$ হইলে যদি উপপাদ্যটির সত্যতা বর্তমান থাকে, তাহা হইলে $n=m+1$ হইলেও উহার সত্যতা বর্তমান থাকিবে।

আমরা পূর্বে দেখিয়াছি যে, $n=3$ হইলে উপপাদ্যটি সত্য।

সুতরাং $n=3+1$ বা 4 হইলেও উহার সত্যতা বর্তমান থাকিবে। আবার, $n=4$ হইলে উপপাদ্যটির সত্যতা বর্তমান থাকে বলিয়া, $n=4+1$ বা 5 হইলেও উহার সত্যতা বর্তমান থাকিবে, ইত্যাদি।

$\therefore$ n-এর যে-কোন ধনাত্মক অখণ্ডমানের জন্য উপপাদ্যটি সত্য।

অনুসিদ্ধান্ত 1. $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে $a=1$ বসাইলে পাওয়া যায়,

$$(1+x)^n=1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\cdots+{}^nC_rx^r+\cdots+x^n$$

$$=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r+\cdots+x^n.$$

$(1+x)^n$-এর বিস্তৃতি হইতেও $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় করা যায়।

$$(a+x)^n=\left\{a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$$

$$=a^n\left\{1+{}^nC_1\left(\frac{x}{a}\right)+{}^nC_2\left(\frac{x}{a}\right)^2+\cdots+{}^nC_r\left(\frac{x}{a}\right)^r+\cdots+\left(\frac{x}{a}\right)^n\right\}$$

$$=a^n+{}^nC_1a^{n-1}x+{}^nC_2a^{n-2}x^2+\cdots+{}^nC_ra^{n-r}x^r+\cdots+x^n.$$

অনুসিদ্ধান্ত 2. x এবং a-এর যে-কোন মানের জন্য $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি সত্য। x-এর স্থলে $(-x)$ লিখিলে পাওয়া যায়,

$$(a-x)^n=a^n-{}^nC_1a^{n-1}x+{}^nC_2a^{n-2}x^2-\cdots\cdots+(-1)^nx^n.$$

ইহাতে $a=1$ বসাইলে পাওয়া যায়,

$$(1-x)^n=1-{}^nC_1x+{}^nC_2x^2-\cdots\cdots+(-1)^nx^n.$$

n-যুগ্ম হইলে উভয় বিস্তৃতির শেষপদ হইবে x^n এবং n-অযুগ্ম হইলে উভয় বিস্তৃতির শেষপদ হইবে $(-x^n)$.

টীকা 1. ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \ldots\ldots, {}^nC_n$-কে **দ্বিপদ সহগ** (Binomial coifficients) বলা হয়। সংক্ষেপে উহাদিগকে যথাক্রমে $C_0, C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ বলা হয়।

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, $(a+x)^n$ এবং $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সহগগুলি একই; $(a-x)^n$ এবং $(1-x)^n$-এর বিস্তৃতির সহগগুলি একই; $(a-x)^n$ এবং $(1-x)^n$-এর বিস্তৃতিদ্বয়ের পদগুলির সাংখ্যমান যথাক্রমে $(a+x)^n$ এবং $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতিদ্বয়ের পদগুলির সাংখ্যমানের সমান। প্রথমোক্ত

বিস্তৃতিদ্বয়ের পদগুলি একান্তরক্রমে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক এবং শেষোক্ত বিস্তৃতিদ্বয়ের পদগুলি সবই ধনাত্মক।

n একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা বা ভগ্নাংশ এবং r একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$ কে $\binom{n}{r}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

টীকা 2. $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির পদগুলির সংখ্যা সসীম এবং উহাদের সংখ্যা $(n+1)$, অর্থাৎ $(a+x)^n$-এর সূচক n-অপেক্ষা 1 বেশী।

টীকা 3. প্রত্যেক পদে x-এর সূচক ঐ পদটির ক্রমিক অবস্থানসূচক সংখ্যা অপেক্ষা 1 কম, কিন্তু C-এর অনুসর্গ (suffix)-এর সমান। প্রত্যেক পদের সাংখ্যসহগের লব ও হরের উৎপাদক-সংখ্যা ঐ পদের ক্রমিক অবস্থানসূচক সংখ্যা অপেক্ষা 1 কম।

8·3. সাধারণ পদ : সাধারণতঃ দ্বিপদ রাশির বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদকে **সাধারণ পদ** (General term) বলা হয়। সাধারণ পদে $r=0, 1, 2, \cdots n$ বসাইলে বিস্তৃতিটির সমস্ত পদই পাওয়া যায়। সাধারণ পদকে অর্থাৎ $(r+1)$-তম পদকে সংক্ষেপে T_{r+1} বা t_{r+1} দ্বারা সূচিত করা হয়।

$(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির,

প্রথম পদ $=t_1=t_{0+1}=a^n={}^nC_0a^nx^0$,

দ্বিতীয় পদ $=t_2=t_{1+1}={}^nC_1a^{n-1}x$,

তৃতীয় পদ $=t_3=t_{2+1}={}^nC_2a^{n-2}x^2$,

চতুর্থ পদ $=t_4=t_{3+1}={}^nC_3a^{n-3}x^3$.

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$\therefore$ সাধারণ পদ $=(r+1)$-তম পদ $=t_{r+1}={}^nC_ra^{n-r}x^r$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}x^r.$$

অনুসিদ্ধান্ত : $(a-x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ $=(-1)^r\ {}^nC_ra^{n-r}x^r$,

$(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ $={}^nC_r\ x^r$

এবং $(1-x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ $=(-1)^r\ {}^nC_rx^r$.

টীকা : সাধারণ পদের মাধ্যমে $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিকে

$(a+x)^n=\sum_{r=0}^{n}{}^nC_r\ a^{n-r}\ x^r$ আকারে লেখা হয়।

অনুরূপভাবে, $(a-x)^n=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\ {}^nC_r\ a^{n-r}\ x^r$; $(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}{}^nC_r\ x^r$;

এবং $(1-x)^n=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\ {}^nC_r\ x^r$.

8·4. মধ্যপদ ঃ

$(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির পদসংখ্যা $(n+1)$ অর্থাৎ সূচক n অপেক্ষা 1 বেশী। সুতরাং n-যুগ্ম হইলে পদসংখ্যা অযুগ্ম হইবে এবং তখন বিস্তৃতির মধ্যপদ হইবে একটি ; n অযুগ্ম হইলে পদসংখ্যা যুগ্ম হইবে এবং তখন বিস্তৃতির মধ্যপদ হইবে দুইটি।

(i) মনে কর, n একটি যুগ্ম সংখ্যা $=2m$, অর্থাৎ $m=\frac{1}{2}n$.

এখানে পদসংখ্যা $=n+1=2m+1$, অর্থাৎ একটি অযুগ্ম সংখ্যা।

সুতরাং মধ্যপদ একটি হইবে এবং উহা $(m+1)$-তম পদ অর্থাৎ $(\frac{1}{2}n+1)$-তম পদ।

মধ্যপদ $=t_{\frac{1}{2}n+1}={}^nC_{\frac{1}{2}n}a^{n-\frac{1}{2}n}x^{\frac{1}{2}n}={}^nC_{\frac{1}{2}n}a^{\frac{1}{2}n}x^{\frac{1}{2}n}=\dfrac{n!\,a^{\frac{1}{2}n}x^{\frac{1}{2}n}}{\{(\frac{1}{2}n)!\}^2}$.

(ii) মনে কর, $n=$ অযুগ্ম সংখ্যা $=2m+1$, অর্থাৎ $m=\frac{1}{2}(n-1)$.

এখানে পদসংখ্যা $=n+1=2m+2=$ একটি যুগ্ম সংখ্যা।

সুতরাং মধ্যপদ দুইটি হইবে এবং উহারা যথাক্রমে $(m+1)$-তম এবং $(m+2)$-তম পদ ; অর্থাৎ $\{\frac{1}{2}(n-1)+1\}$-তম এবং $\{\frac{1}{2}(n-1)+2\}$-তম পদ

অর্থাৎ $\{\frac{1}{2}(n+1)\}$-তম পদ এবং $\{\frac{1}{2}(n+3)\}$-তম পদ।

$\therefore$ মধ্যপদ দুইটি যথাক্রমে $t_{\frac{1}{2}(n+1)}={}^nC_{\frac{1}{2}(n-1)}a^{\frac{n+1}{2}}x^{\frac{n-1}{2}}$

$$=\frac{n!\,.\,a^{\frac{n+1}{2}}x^{\frac{n-1}{2}}}{\{\frac{1}{2}(n-1)\}!\,.\{\frac{1}{2}(n+1)\}!}$$

এবং $t_{\frac{1}{2}(n+3)}={}^nC_{\frac{1}{2}(n+1)}a^{\frac{n-1}{2}}x^{\frac{n+1}{2}}=\dfrac{n!\,.\,a^{\frac{n-1}{2}}x^{\frac{n+1}{2}}}{\{\frac{1}{2}(n-1)\}!\,.\{\frac{1}{2}(n+1)\}!}$.

সুতরাং মধ্যপদ দুইটির সাংখ্য-সহগদ্বয় সমান।

8·5. সমদূরবর্তী পদ ঃ

$(a+x)^n$-এর অথবা $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির প্রথম দিক হইতে ও শেষ দিক হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সহগ পরস্পর সমান।

বিস্তৃতির প্রথম দিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ $={}^nC_r$.

বিস্তৃতির পদসংখ্যা $(n+1)$ বলিয়া, শেষদিক হইতে $(r+1)$-তম পদের পূর্বে $\{(n+1)-(r+1)\}$-সংখ্যক বা $(n-r)$-সংখ্যক পদ আছে।

সুতরাং শেষদিক হইতে $(r+1)$-তম পদটি প্রথম দিক হইতে $(n-r)$-তম পদের পরবর্তী পদ অর্থাৎ $(n-r+1)$-তম পদ। ইহার সহগ $={}^nC_{n-r}$;

কিন্তু ${}^nC_r={}^nC_{n-r}$.

অতএব, প্রথমদিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ

= শেষদিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ।

8·6. বৃহত্তম সহগ ঃ

$(a+x)^n$-এর অথবা $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম সহগ নির্ণয়

$(a+x)^n$ এবং $(1+x)^n$-এর যে-কোন একটি বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদের সহগ$={}^nC_r$. পূর্ব অধ্যায়ে আলোচিত হইয়াছে যে, n একটি যুগ্ম সংখ্যা হইলে, ${}^nC_r$ বৃহত্তম হইবে, যখন $r=\frac{1}{2}n$; n একটি অযুগ্ম সংখ্যা হইলে ${}^nC_r$ বৃহত্তম হইবে, যখন $r=\frac{1}{2}(n-1)$, অথবা, $\frac{1}{2}(n+1)$.

$\therefore$ n যুগ্ম হইলে $(\frac{1}{2}n+1)$-তম পদের অর্থাৎ মধ্যপদের সহগ বৃহত্তম হইবে ;

n অযুগ্ম হইলে, $\{\frac{1}{2}\,n-1)+1\}$-তম পদের এবং $\{\frac{1}{2}(n+1)+1\}$-তম পদের অর্থাৎ মধ্যপদদ্বয়ের পরস্পর সমান সহগদ্বয় বৃহত্তম হইবে।

8·7. বৃহত্তম পদ ঃ

a এবং x ধনাত্মক হইলে $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয়

$(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির r-তম পদকে t_r দ্বারা সূচিত করিলে,

$$t_r={}^nC_{r-1}a^{n-r+1}x^{r-1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{1.2.3\cdots\cdots(r-1)}.a^{n-r+1}x^{r-1},$$

$$t_{r+1}={}^nC_ra^{n-r}x^r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots(r-1)r}a^{n-r}x^r.$$

$$\therefore\quad \frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{x}{a}.$$

সুতরাং $t_{r+1}>=$ অথবা $<t_r$ হইবে,

যদি $\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{x}{a}>=$ অথবা <1 হয়,

অর্থাৎ যদি $nx-rx+x>=$ অথবা $<ra$ হয়,

অর্থাৎ যদি $(n+1)x>=$ অথবা $<(x+a)r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $r\ <=$ অথবা $>\frac{n+1}{x+a}\cdot x$ হয়।

(i) যদি $\frac{n+1}{x+a}\cdot x$ একটি পূর্ণসংখ্যা, p-এর সমান হয়, তাহা হইলে r-এর মান ক্রমশঃ বাড়িলে যতক্ষন $r<p$ থাকিবে, ততক্ষণ $t_{r+1}>t_r$ হইবে,

অর্থাৎ প্রত্যেক পদ তৎপূর্ববর্তী পদটি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

যখন $r=p$ হইবে, $t_{r+1}=t_r$ হইবে, অর্থাৎ $t_{r+1}=t_r=t_p$ হইবে।

r-এর মান p অপেক্ষা ক্রমশঃ বেশী হইতে থাকিলে, $t_{r+1}<t_r$ হইবে,

অর্থাৎ প্রত্যেক পদ তৎপূর্ববর্তী পদটি অপেক্ষা ছোট হইবে।

অতএব r যতক্ষণ p অপেক্ষা কম হইবে, ততক্ষণ পদগুলির মান ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইতে থাকিবে এবং r ঐ মান অতিক্রম করিয়া গেলে পদগুলির মান ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে।

সুতরাং $r=p$ হইলে, $t_{r+1}=t_r$ অর্থাৎ $t_{p+1}=t_p$ হইবে এবং উহারা বৃহত্তম পদ হইবে।

(ii) যদি $\frac{n+1}{x+a}\cdot x$ একটি পূর্ণসংখ্যা না হয়, মনে কর,

উহা একটি পূর্ণসংখ্যা $q+$একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

r-এর মান ক্রমশঃ বাড়িয়া q-পর্যন্ত হইলে, $r<\frac{n+1}{x+a}\cdot x$ এবং $t_{r+1}>t_r$ হইবে; অর্থাৎ প্রত্যেক পদ তৎপূর্ববর্তী পদটি অপেক্ষা বড় হইবে।

$r=q+1$ এবং ক্রমশঃ ততোধিক হইলে $t_{r+1}<t_r$ হইবে; অর্থাৎ প্রত্যেক পদ তৎপূর্ববর্তী পদ অপেক্ষা ছোট হইবে।

অতএব $t_{q+1}>t_q>t_{q-1}\cdots\cdots$এবং $t_{q+1}>t_{q+2}>t_{q+3}\cdots\cdots$

সুতরাং t_{q+1}-ই বৃহত্তম পদ।

টীকা 1. যদি $\frac{n+1}{x+a}\cdot x$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ হয়,

অর্থাৎ যদি $(n+1)x<x+a$ হয়, অর্থাৎ যদি $x<\frac{a}{n}$ হয়; তাহা হইলে প্রথম পদই বৃহত্তম পদ হইবে অর্থাৎ পদগুলি ক্রমশঃ ছোট হইতে থাকিবে।

যদি $\frac{n+1}{x+a}x>n$ হয়, অর্থাৎ যদি $x>na$ হয়, তাহা হইলে শেষ পদই বৃহত্তম পদ হইবে, অর্থাৎ পদগুলি ক্রমশঃ বড় হইতে থাকিবে।

টীকা 2. অনুরূপভাবে, $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয় করা যায়। $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদে a-এর স্থলে 1 লিখিয়াও $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয় করা যায়।

কোন পদের চিহ্ন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন, পদটির সাংখ্যমান বৃহত্তম হইলেই পদটিকে বৃহত্তম বলিয়া ধরা হয়। সুতরাং $(a-x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ ও $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ একই এবং $(1-x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ ও $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ একই।

8·8. দ্বিপদ সহগের ধর্মাবলী ঃ

পূর্বেই আলোচিত হইয়াছে যে, ${}^nC_o, {}^nC_1, {}^nC_2, \cdots {}^nC_r \cdots, {}^nC_n$ ইত্যাদি দ্বিপদ সহগগুলিকে সংক্ষেপে যথাক্রমে $C_o, C_1, C_2, \cdots C_r, \cdots C_n$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

অতএব $(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \cdots + {}^nC_rx^r + \cdots + x^n$

$$= C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_rx^r + \cdots + C_nx^n. \cdots (1)$$

(i) **$(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির পদসমূহের সহগগুলির সমষ্টি 2^n.**

(1)-এর উভয় পার্শ্বে $x=1$ বসাইলে,

$2^n = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_r + \cdots + C_n =$ দ্বিপদ সহগগুলির সমষ্টি।

(ii) **$(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির অযুগ্ম পদসমূহের সহগগুলির সমষ্টি, উহার যুগ্ম পদসমূহের সহগগুলির সমষ্টির সমান এবং প্রত্যেকটি সমষ্টি 2^{n-1}.**

(1)-এর উভয়পার্শ্বে $x = -1$ বসাইলে,

$$0 = C_o - C_1 + C_2 - \cdots + (-1)^r C_r + \cdots + (-1)^n C_n.$$

$\therefore \quad C_0 + C_2 + C_4 + \cdots\cdots = C_1 + C_3 + C_5 + \cdots\cdots$

$= \frac{1}{2} \times$ (সমস্ত সহগগুলির সমষ্টি)

$= \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}.$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ (i) হইতে, $C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n = 2^n - C_o = 2^n - 1.$

ইহা হইতে বলা যায় যে, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে 1 হইতে n-সংখ্যক পর্যন্ত বস্তু লইয়া সমবায় করিলে মোট সমবায়-সংখ্যা হয় $2^n - 1$.

ইহা পৃথক পদ্ধতিতে 7'16 অনুচ্ছেদে প্রমাণিত হইয়াছে।

টীকা ঃ $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির পদসমূহের সাংখ্যসহগগুলি একই ধর্মাবলম্বী। $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতি হইতে সহগগুলি সম্বন্ধে যে-তথ্যগুলি পাওয়া গিয়াছে, $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি হইতেও $a=x=1$ এবং $a=1, x=-1$ বসাইলে ঐ তথ্যগুলি পাওয়া যায়।

8·9. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. বিস্তার কর ঃ $(2a-3x)^6$. [W.B.B.H.S.]

8'2 অনুচ্ছেদের সূত্র (1)-এ, a-এর পরিবর্তে $2a$ এবং x-এর পরিবর্তে $(-3x)$ লিখিলে পাওয়া যায়,

$$(2a-3x)^6 = (2a)^6 + {}^6C_1(2a)^5.(-3x) + {}^6C_2(2a)^4.(-3x)^2$$
$$+ {}^6C_3(2a)^3.(-3x)^3 + {}^6C_4(2a)^2.(-3x)^4 + {}^6C_5(2a).(-3x)^5 + (-3x)^6.$$

এক্ষণে. ${}^6C_1=6,\ {}^6C_2=\frac{6.5}{2.1}=15,\ {}^6C_3=\frac{6.5.4}{3.2.1}=20,\ {}^6C_4={}^6C_2=15,$

$${}^6C_5={}^6C_1=6$$

$\therefore\ (2a-3x)^6=64a^6-576a^5x+2160a^4x^2-4320a^3x^3+4860a^2x^4$
$-2916ax^5+729x^6.$

উদাহরণ 2. $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{15}$-এর বিস্তৃতিতে x^{32}-এর সহগ কত ?

[W.B.B.H.S.]

মনে কর, $(r+1)$-তম পদে x^{32} থাকিবে।

এখন, $t_{r+1}=(-1)^r.\ {}^{15}C_r(x^4)^{15-r}.\left(\frac{1}{x^3}\right)^r$

$=(-1)^r.{}^{15}C_rx^{60-4r}.\ x^{-3r}$

$=(-1)^r.{}^{15}C_rx^{60-7r}.$

$(r+1)$-তম পদে x^{32} থাকিলে, $x^{60-7r}=x^{32}$ হইবে।

সুতরাং $60-7r=32$

অর্থাৎ $r=4.$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=(-1)^4.\ {}^{15}C_4=\frac{15\ 14.13.12}{4.3.2.1}=1365.$

উদাহরণ 3. $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$-এর বিস্তৃতির x-বর্জিত পদটি নির্ণয় কর।

[C. P. U.]

মনে কর, ইহার $(r+1)$-তম পদটি x বর্জিত।

$$t_{r+1}={}^{12}C_r.(x^2)^{12-r}.\left(\frac{1}{x}\right)^r={}^{12}C_rx^{24-2r}.\ x^{-r}$$

$$={}^{12}C_rx^{24-3r}.$$

এখন, $(r+1)$-তম পদটি x-বর্জিত হইলে, $x^{24-3r}=1=x^0,$

অর্থাৎ $24-3r=0,$

অর্থাৎ $r=8.$

সুতরাং $t_{8+1}=t_9$ অথবা নবম পদটি x-বর্জিত এবং সে পদটি হইল

$${}^{12}C_8x^{24-24}={}^{12}C_4=\frac{12.11.10.9}{4.3.2.1}=495.$$

উদাহরণ 4. $(1-2x^2+3x^4)\left(1-\frac{1}{x}\right)^6$-এর বিস্তৃতিতে x-এর সহগ নির্ণয় কর।

$$(1-2x^2+3x^4)\left(1-\frac{1}{x}\right)^6$$

$$=(1-2x^2+3x^4)\left(1-{}^6C_1.\frac{1}{x}+{}^6C_2.\frac{1}{x^2}-{}^6C_3.\frac{1}{x^3}+{}^6C_4.\frac{1}{x^4}-{}^6C_5.\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^6}\right)$$

$$=(1-2x^2+3x^4)\left(1-\frac{6}{x}+\frac{15}{x^2}-\frac{20}{x^3}+\frac{15}{x^4}-\frac{6}{x^5}+\frac{1}{x^6}\right).$$

এক্ষণে, কেবলমাত্র $(-2x^2)\times\left(-\frac{6}{x}\right)$ এবং $(3x^4)\left(-\frac{20}{x^3}\right)$, গুণফল দুইটি হইতেই x-এর সহগ পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ x-এর নির্ণেয় সহগ $=12-60=-48$.

উদাহরণ 5. $(3x+2)^{19}$-এর বিস্তৃতিতে x^r-এর এবং x^{r+1}-এর সহগ সমান হইলে, r-এর মান নির্ণয় কর। [C. P. U.]

মনে কর, বিস্তৃতিটির $(p+1)$-তম পদে x^{r+1} থাকিবে।

এখন, $t_{p+1}={}^{19}C_p(3x)^{19-p}.2^p$
$={}^{19}C_p.3^{19-p}.2^p.x^{19-p}$.

$(p+1)$-তম পদে x^{r+1} থাকিলে, $x^{19-p}=x^{r+1}$ হইবে,

অর্থাৎ $19-p=r+1$ হইবে,

অর্থাৎ $p=18-r$.

$\therefore$ x^{r+1}-এর সহগ $={}^{19}C_{18-r}.3^{r+1}.2^{18-r}$.

এক্ষণে, $(p+1)$-তম পদে x^{r+1} থাকিলে, $(p+2)$-তম পদে x^r থাকিবে।

$\therefore$ x^r-এর সহগ $={}^{19}C_{p+1}.(3)^{19-(p+1)}.2^{p+1}$
$={}^{19}C_{19-r}.3^r.2^{19-r}$.

প্রদত্ত শর্তানুসারে, ${}^{19}C_{18-r}.3^{r+1}.2^{18-r}={}^{19}C_{19-r}.3^r.2^{19-r}$

অথবা, $\frac{19\,!}{(18-r)\,!.(r+1)\,!}.\ 3=\frac{19\,!}{(19-r)\,!.\,r\,!}.\ 2$

অথবা, $\frac{3}{r+1}=\frac{2}{19-r}$

অথবা, $57-3r=2r+2$

অথবা, $5r=55$ অর্থাৎ, $r=11$.

উদাহরণ 6. (*a*) $(3x-2y)^{18}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদটি নির্ণয় কর।
(*b*) $(a+x)^{2n+1}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদদ্বয় নির্ণয় কর।

[W.B.B.H.S.]

(*a*) $(3x-2y)^{18}$-এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা $=18+1=19$.
সুতরাং $(\frac{18}{2}+1)$-তম বা দশম পদটি বিস্তৃতির মধ্যপদ।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যপদ $={}^{18}C_9(3x)^{18-9}(-2y)^9$

$$=\frac{-18\,!}{9\,!\,.\,9\,!}\,2^9.3^9.x^9.y^9.$$

(*b*) $(a+x)^{2n+1}$-এর বিস্তৃতির পদসংখ্যা $=2n+1+1$
$=2n+2=$ একটি যুগ্ম সংখ্যা।
সুতরাং ইহার দুইটি মধ্যপদ থাকিবে। ঐ দুইটি পদ যথাক্রমে $\{\frac{1}{2}(2n+1+1)\}$-তম বা $(n+1)$-তম পদ এবং $\{\frac{1}{2}(2n+1+3)\}$-তম বা $(n+2)$-তম পদ।

$\therefore$ প্রথম মধ্যপদ $=t_{n+1}={}^{2n+1}C_n a^{2n+1-n}.x^n$

$$=\frac{(2n+1)\,!}{n\,!\,.\,(n+1)\,!}\,a^{n+1}x^n$$

এবং দ্বিতীয় মধ্যপদ $=t_{n+2}={}^{2n+1}C_{n+1}a^{2n+1-(n+1)}.x^{n+1}$

$$=\frac{(2n+1)\,!}{n\,!\,.\,(n+1)\,!}\,a^n x^{n+1}.$$

উদাহরণ 7. $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পদ যথাক্রমে 240, 720 এবং 1080 হইলে, a, x, n-এর মান নির্ণয় কর। [B.U.Ent.]

$(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় পদ $={}^nC_1a^{n-1}x=na^{n-1}x=240$ ... (1)

তৃতীয় পদ $={}^nC_2a^{n-2}x^2=\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}x^2=720$ ... (2)

এবং চতুর্থ পদ $={}^nC_3a^{n-3}x^3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^{n-3}x^3=1080$ ... (3)

(2)-কে (1) দ্বারা ভাগ করিলে, $\frac{(n-1)x}{2a}=3$

অথবা, $(n-1)x=6a$ ... (4)

(3)-কে (2) দ্বারা ভাগ করিলে, $\frac{(n-2)x}{3a}=\frac{3}{2}$

অথবা, $2(n-2)x=9a$ ... (5)

(5)-কে (4) দ্বারা ভাগ করিলে, $\frac{2(n-2)}{n-1}=\frac{3}{2}$

অথবা, $4n-8=3n-3$ অথবা, $n=5$.

n-এর মান (1)-এ এবং (4)-এ বসাইলে, $5a^4x=240$ অর্থাৎ $a^4x=48$ ...(6)

এবং $4x=6a$ অর্থাৎ $x=\frac{3}{2}a$ ... (7)

(6)-এ (7) বসাইলে, $\frac{3}{2}a^5=48$ অর্থাৎ $a^5=\frac{48\times 2}{3}=32=2^5$.

$\therefore \quad a=2.$

$\therefore$ (7) হইতে, $x=\frac{3}{2}.2=3.$

$\therefore \quad a=2, x=3, n=5.$

উদাহরণ 8. $(x+y)^{10}$ এবং $(3-5x)^8$-এর বিস্তৃতিদ্বয়ে বৃহত্তম সাংখ্য-সহগ কত ?

$(x+y)$-এর পদ দুইটির সাংখ্য-সহগদ্বয় 1 বলিয়া, $(x+y)^{10}$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম সাংখ্য-সহগ $={}^{10}C_r$, যখন $r=\frac{1}{2}.10=5$.

$\therefore (x+y)^{10}$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম সাংখ্য-সহগ$={}^{10}C_5=\frac{10\,!}{5\,!\,.\,5\,!}=\frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.1}$
$=252.$

$(3-5x)^8$-এর বিস্তৃতির ক্ষেত্রে, $\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{8-r+1}{r}.\frac{5}{3}.$

(শুধু সাংখ্যমান প্রয়োজন বলিয়া ঋণাত্মক চিহ্ন ধরিবার প্রয়োজন নাই)

$\therefore \quad t_{r+1}>t_r$ হইবে, যদি $5(9-r)>3r$,

অর্থাৎ যদি $45>8r$,

অর্থাৎ যদি $r<5\frac{5}{8}$.

$\therefore \quad t_6$-এর সহগ বৃহত্তম হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম সহগ$={}^8C_5.3^3.5^5=\frac{8.7.6}{3.2.1}\times 27\times 3125=4725000.$

উদাহরণ 9. নিম্নলিখিত বিস্তৃতিদ্বয়ের বৃহত্তমপদ নির্ণয় কর :

(a) $(5+4x)^{12}$, যখন $x=\frac{2}{3}$.

(b) $(3a+2x)^7$, যখন $a=2$ এবং $x=5$.

(a) এখানে, $\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{12-r+1}{r}.\frac{4x}{5}=\frac{13-r}{r}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{8(13-r)}{15r}.$

$\therefore \quad t_{r+1}>=$ অথবা $<t_r$ হইবে, যদি $8(13-r)>=$ অথবা $<15r$,

অর্থাৎ যদি $104>=$ অথবা $<23r$,

অর্থাৎ যদি $r<=$ অথবা $>\frac{104}{23}$ বা $4\frac{12}{23}$.

$\therefore \quad r$-এর মান 1, 2, 3 বা 4 হইলে, $t_{r+1}>t_r$ অর্থাৎ $t_5>t_4>t_3>\ldots\ldots$

এবং r-এর মান 5, 6. 7,····· হইলে, $t_{r+1} < t_r$ অর্থাৎ $t_r > t_{r+1}$

অর্থাৎ $t_5 > t_6 > t_7 > \cdots\cdots$

স্থতরাং t_5 বৃহত্তম পদ।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম পদ $= {}^{12}C_4 5^8 (4x)^4 = \frac{12.\ 11.\ 10.\ 9}{4.\ 3.\ 2.\ 1}.\ 5^8.\ \left(\frac{8}{3}\right)^4$

$= \frac{88000000000}{9}.$

(b) এখানে, $\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{7-r+1}{r}.\ \frac{2x}{3a} = \frac{8-r}{r}.\ \frac{2.5}{3.2} = \frac{40-5r}{3r}.$

$\therefore$ $t_{r+1} >=$ অথবা $< t_r$ হইবে, যদি $40 - 5r > =$ অথবা $< 3r$,

অর্থাৎ যদি $40 > =$ অথবা $< 8r$,

অর্থাৎ যদি $r < =$ অথবা > 5.

$\therefore$ $r < 5$ হইলে, অর্থাৎ $r = 1,2,3,4$ হইলে, $t_{r+1} > t_r$

অর্থাৎ $t_5 > t_4 > t_3 > \cdots\cdots$

$r = 5$ হইলে, $t_{r+1} = t_r$ অর্থাৎ $t_6 = t_5$ হইবে।

আবার, $r > 5$ হইলে, অর্থাৎ $r = 6, 7, 8, \cdots\cdots$ হইলে, $t_{r+1} < t_r$

অর্থাৎ $t_r > t_{r+1}$ হইবে অর্থাৎ $t_6 > t_7 > t_8 > \cdots\cdots$ হইবে।

স্থতরাং বৃহত্তম পদ দুইটি হইল t_5 ও t_6 এবং উহারা পরস্পর সমান।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম পদ $= t_5 = t_6 = {}^7C_4 (3a)^3 (2x)^4 = \frac{7.6.5}{3.2.1} (3 \times 2)^3 (2 \times 5)^4$

$= 75600000.$

উদাহরণ 10. $(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots\cdots + C_n x^n$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \cdots\cdots + (n+1)C_n = (n+2).2^{n-1}.$ [W.B.B.H.S.]

(ii) $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots\cdots + C_n^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$ [W.B.B.H.S.]

(i) $C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \cdots\cdots + (n+1)C_n$

$= (C_0 + C_1 + C_2 \cdots\cdots + C_n) + (C_1 + 2C_2 + \cdots\cdots + nC_n)$

$= 2^n + \left\{n + 2.\frac{n(n-1)}{2!} + 3.\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots\cdots + n\right\}$

$= 2^n + n\left\{1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + \cdots\cdots + 1\right\}$

$= 2^n + n(1+1)^{n-1} = 2^n + n.2^{n-1} = (n+2).2^{n-1}.$

(ii) $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots\cdots + C_nx^n$ ... (1)

আবার, $(x+1)^n = C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots\cdots + C_n$ ... (2)

(1) ও (2) গুণ করিলে,

$$(1+x)^{2n} = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)(C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_n).$$

ইহা একটি অভেদ। সেইজন্য ইহার বামপক্ষের x-এর যে-কোন ঘাতের সহগ ডানপক্ষের x-এর সেই ঘাতের সহগের সমান।

$\therefore$ বামপক্ষের x^n-এর সহগ = ডানপক্ষের x^n-এর সহগ,

অর্থাৎ $(1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতির x^n-এর সহগ $= C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2$

অথবা, $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2 = {}^{2n}C_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

উদাহরণ 11. দেখাও যে,

$$(1+x)^n + {}^nC_1(1+x)^{n-1}(1-x) + {}^nC_2(1+x)^{n-2}(1-x)^2 + \cdots\cdots \cdots + (1-x)^n = 2^n.$$

মনে কর, $1+x=a$ এবং $1-x=b$.

$\therefore$ বামপক্ষ $= a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n$

$= (a+b)^n = (1+x+1-x)^n = 2^n =$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 12. দ্বিপদ উপপাদ্য প্রযোগ করিয়া, $(\cdot999)^3$-এর ছয় দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধমান নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

$(\cdot999)^3 = (1 - \cdot001)^3 = 1^3 - 3(\cdot001) + 3(\cdot001)^2 - (\cdot001)^3$

$= 1 - \cdot003 + \cdot000003 - \cdot000000001$

$= \cdot997002999 = \cdot997003$ (ছয় দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ)।

প্রশ্নমালা VIII(A)

1. নিম্নের দ্বিপদ রাশিগুলি বিস্তার কর :

(i) $(2+a)^5$. (ii) $(x^2-1)^6$. (iii) $(2x-3y)^7$. (iv) $(bc-a^2)^8$.

(v) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^7$. (vi) $(x^2 - x\sqrt{2})^8$. (vii) $\left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{3}{2x}\right)^6$ [W.B.B.H.S.]

(viii) $(\sqrt{3}+x)^6 + (\sqrt{3}-x)^6$.

2. সরল কর :

(i) $(\sqrt{2}+1)^5 - (\sqrt{2}-1)^5$. (ii) $(a+\sqrt{1-a^2})^6 + (a-\sqrt{1-a^2})^6$.

3. x-এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে $(1+x-2x^2)^7$-কে চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তার কর।

4. x-এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে $(1+x+x^2)^n$-এর x^3 পর্যন্ত বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

5. (i) $(2x-3x^2)^{10}$-এর বিস্তৃতিতে x^{13}-এর সহগ নির্ণয় কর।

(ii) $(x-2y)^{13}$-এর বিস্তৃতিতে x^{10}-এর সহগ কত? [W.B.B.H.S.]

(iii) $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^{12}$-এর বিস্তৃতিতে x^{-11}-এর সহগ নির্ণয় কর। [C.P.U]

(iv) $\left(y^2+\frac{c^3}{y}\right)^5$-এর বিস্তৃতিতে y-এর সহগ কত? [W.B.B H.S.]

6. (i) $\left(2x+\frac{1}{3x^2}\right)^9$-এর বিস্তৃতিতে x-বর্জিত পদটি নির্ণয় কর। [H.S. 1978]

(ii) $\left(9x^2-\frac{1}{3x}\right)^{12}$-এর বিস্তৃতিতে x-নিরপেক্ষ পদটি কত? [W.B.B.H.S.]

7. দেখাও যে, $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^n$-এর বিস্তৃতিতে x^p-এর সহগ হইল

$$\frac{n\,!}{\{\frac{1}{3}(n-p)\}\,!\,.\,\{\frac{1}{3}(2n+p)\}\,!}.$$

8. m ও n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, দেখাও যে, $(1+x)^{m+n}$-এর বিস্তৃতিতে x^m ও x^n-এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান। [W.B.B.H.S.]

9. প্রমাণ কর যে, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$-এর বিস্তৃতিতে x-নিরপেক্ষ পদটি হইল $\frac{(2n)!}{(n\,!)^2}$.

10. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$-এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$-তম পদটি x-নিরপেক্ষ হইলে r-এর মান নির্ণয় কর। [C. P. U.]

11. (a) $(1+x)^m\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$-এর বিস্তৃতিতে x-বর্জিত পদটি নির্ণয় কর।

(b) $(1+2x+x^3)\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$-এর বিস্তৃতির x-নিরপেক্ষ পদটি কত?

12. $(3-2x+x^2)\left(1-\frac{1}{x}\right)^5$-এর বিস্তৃতিতে x-এর সহগ নির্ণয় কর।

13. $(2+\frac{1}{2})^9$-এর বিস্তৃতিতে পরপর দুইটি পদ সমান। ঐ দুইটি পদ এবং তাহাদের মান নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

14. $(1+x)^{2p+1}$-এর বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r+1}-এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান হইলে, r-এর মান নির্ণয় কর।

15. (i) $(x-2y)^8$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S]

(ii) $(1+2x+x^2)^m$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় কর।

16. (i) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^7$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদদ্বয় নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

(ii) দেখাও যে, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদদ্বয়

$$\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}x \text{ এবং } \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}\cdot\frac{1}{x}.$$

17. দেখাও যে, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ $\frac{1.3.5.7.\cdots(2n-1)}{n!}.2$

এবং $(1-x)^{2n}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ $\frac{1.3.5.7.\cdots(2n-1)}{n!}.(-2)^n.x^n$.

18. (i) $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির পরপর তিনটি পদের সহগত্রয় যথাক্রমে 165, 330, 462 হইলে, n-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পদের সহগত্রয় সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, n-এর মান কত ?

19. $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির পরপর চারিটি পদের সহগগুলি যথাক্রমে a_1, a_2, a_3, a_4 হইলে, দেখাও যে, $\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}$.

বিস্তৃতির তৃতীয়পদ a_1 হইলে, দেখাও যে, $\frac{a_2^2-a_1a_3}{a_3^2-a_2a_4}=\frac{5a_1}{3a_3}$.

20. $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির p-তম, $(p+1)$-তম এবং $(p+2)$-তম পদের সহগত্রয় সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে, $n^2-n(4p+1)+4p^2=2$.

21. $(x+a)^n$-এর বিস্তৃতির তৃতীয়, চতুর্থ এবং পঞ্চম পদ যথাক্রমে 84, 280 এবং 560 হইলে, a, x এবং n-এর মান নির্ণয় কর।

22. (i) $(a-b)^{11}$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম সাংখ্য-সহগ কত ?

(ii) $(3x-5y)^{10}$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম সাংখ্য-সহগ নির্ণয় কর।

23. নিম্নলিখিত বিস্তৃতিগুলিতে বৃহত্তম পদ নির্ণয় কর :

(i) $(2+3x)^{12}$, যখন $x=\frac{5}{8}$.

(ii) $(a+x)^8$, যখন $a=1, x=2$.

(iii) $(2a-3x)^n$, যখন $a=9, x=-4, n=13$.

(iv) $(ax+by)^n$, যখন $a=2, b=-5, x=3, y=\frac{1}{2}, n=10$.

24. x-এর মান $\dfrac{n}{n+2}$ এবং $\dfrac{n+2}{n}$-এর মধ্যে থাকিলে, দেখাও যে, $(1+x)^{2n+1}$-এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম পদের সাংখ্য-সহগই বৃহত্তম হইবে।

25. $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির পদসমূহের সহগগুলির গুণফল P_n হইলে, দেখাও যে,
$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{(n+1)^n}{n\,!}.$$

26. $(x+a)^n$-এর বিস্তৃতির বিজোড় সংখ্যক পদ-সমূহের সমষ্টি A এবং জোড় সংখ্যক পদ-সমূহের সমষ্টি B হইলে, প্রমাণ কর যে,

$A^2-B^2=(x^2-a^2)^n$ এবং $4AB=(x+a)^{2n}-(x-a)^{2n}$.

27. $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির পরপর পদসমূহ $t_0, t_1, t_2, \cdots\cdots t_n$ দ্বারা সূচিত হইলে, দেখাও যে,
$$(t_0-t_2+t_4-\cdots\cdots)^2+(t_1-t_3+t_5-\cdots\cdots)^2=(a^2+x^2)^n.$$

28. n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, দেখাও যে,

(i) $$(1+x)^n-2nx(1+x)^{n-1}+\frac{2n(2n-2)}{2\,!}x^2(1+x)^{n-2}-\cdots$$
$$\cdots+(-2x)^n=(1-x)^n.$$

(ii) $$x^n(x-1)^n+{}^nC_1x^{n-1}(x-1)^{n-1}(x+1)+\cdots\cdots$$
$$+{}^nC_rx^{n-r}(x-1)^{n-r}(x+1)^r+\cdots+(x+1)^n=(x^2+1)^n.$$

(iii) $$(1+x)^n+{}^nC_1(1+x)^{n-1}(2-x)+{}^nC_2(1+x)^{n-2}(2-x)^2+\cdots$$
$$\cdots+(2-x)^n=3^n.$$

(iv) $1-n+\dfrac{n(n-1)}{2\,!}-\cdots\cdots+(-1)^n=0.$

(v) $x-{}^nC_1(x+y)+{}^nC_2(x+2y)-{}^nC_3(x+3y)+\cdots\cdots=0.$

29. $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots+C_nx^n$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $C_1-2C_2+3C_3-\cdots\cdots+n(-1)^{n-1}C_n=0.$ [C.P.U.]

(ii) $C_1+2C_2+3C_3+\cdots\cdots+nC_n=n.2^{n-1}.$

(iii) $C_0+2C_1+4C_2+6C_3+\cdots+2nC_n=1+n.2^n.$

(iv) $\dfrac{C_0}{1}+\dfrac{C_1}{2}+\dfrac{C_2}{3}+\dfrac{C_3}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{C_n}{n+1}=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

(v) $(C_0+C_1)(C_1+C_2)\cdots(C_{n-1}+C_n)=C_1C_2C_3\cdots C_n.\dfrac{(n+1)^n}{n!}$.

(vi) $C_0C_n+C_1C_{n-1}+\cdots\cdots+C_nC_0=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

(vii) $C_0C_r+C_1C_{r+1}+C_2C_{r+2}+\cdots\cdots+C_{n-r}C_n$

$$=\frac{(2n)!}{(n-r)!(n+r)!}.$$

(viii) $\dfrac{C_1}{C_0}+\dfrac{2C_2}{C_1}+\dfrac{3C_3}{C_2}+\cdots\cdots+\dfrac{nC_n}{C_{n-1}}=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(ix) $C_1^2+2C_2^2+3C_3^2+\cdots+nC_n^2=\dfrac{(2n-1)!}{\{(n-1)!\}^2}$.

(x) $C_0^2-C_1^2+C_2^2-\ldots+(-1)^nC_n^2=0$, যদি n অযুগ্ম সংখ্যা হয়।

(xi) $C_0^2-C_1^2+C_2^2-\cdots+(-1)^nC_n^2$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n!}{\{(\frac{1}{2}n)!\}^2},$$ যদি n যুগ্ম সংখ্যা হয়।

(xii) $(C_0+C_1+C_2+\cdots\cdots+C_n)^2$

$$={}^{2n}C_0+{}^{2n}C_1+{}^{2n}C_2+\cdots\cdots+{}^{2n}C_{2n}.$$

30. $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{2n}x^{2n}$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{2n}=3^n$.

(ii) $a_0-a_1+a_2-\cdots\cdots+a_{2n}=1$.

(iii) $a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots+a_{2n-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)$.

31. দেখাও যে, n-এর যে-কোন ধনাত্মক অখণ্ড মানের জন্য, $(5x-4y)^n$-এর বিস্তৃতির সাংখ্য-সহগগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি 1.

[বিস্তৃতিটিতে $x=y=1$ বসাইলে, বামপার্শ্ব $=(5.1-4.1)^n=1$ এবং ডানপার্শ্ব = সাংখ্য-সহগগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি।]

32. দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করিয়া,

(i) $(1{\cdot}03)^4$-এর চারি দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর;

(ii) $(99)^4$-এর মান নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

B. ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক সূচক

8·10. সূচক n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, প্রমাণ করা হইয়াছে যে,
$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r + \cdots\cdots$$
দক্ষিণপক্ষের শ্রেণীটির সাধারণ পদের অর্থাৎ $(r+1)$-তম পদের সহগ
$$= \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

সুতরাং $r=n+1$ হইলে, এই সহগটি শূন্য হইবে এবং যে-সকল পদের x-এর সূচক n অপেক্ষা বৃহত্তর তাহাদের সহগ শূন্য হইবে, অর্থাৎ শ্রেণীটি x^n-এর পর আপনা হইতেই বন্ধ হইয়া যাইবে। অতএব n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির শ্রেণীটির পদ-সংখ্যা সসীম (finite) হইবে এবং শ্রেণীটিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ থাকিবে, অর্থাৎ শ্রেণীটি সসীম হইবে।

কিন্তু n-ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা না হইয়া, ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে, r সর্বদা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা বলিয়া, r-এর মান যাহাই হউক না কেন, x^r-এর সহগের লবের কোন উৎপাদকই শূন্য হইতে পারে না। সুতরাং এরূপ ক্ষেত্রে x-এর সূচক যাহাই হউক না কেন, x^r-এর সহগ কখনও শূন্য হইবে না। অতএব শ্রেণীটি শেষ হইবে না অর্থাৎ সসীম হইবে না ; ইহা একটি অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত শ্রেণী হইবে।

সকল সসীম শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করা সম্ভব এবং ঐ যোগফল সসীম। কিন্তু সকল অসীম শ্রেণীর যোগফল সসীম নাও হইতে পারে।

যথা, $1+2+3+4+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত শ্রেণীটির যোগফল সসীম নহে ;

আবার, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত শ্রেণীটির যোগফল 2 অর্থাৎ সসীম।

পূর্বে উল্লিখিত প্রকারের অসীম শ্রেণীকে **অপসারী** (Divergent) অসীম শ্রেণী এবং পরে উল্লিখিত প্রকারের অসীম শ্রেণীকে **অভিসারী** (Convergent) অসীম শ্রেণী বলে।

সসীম শ্রেণীর মত সর্বঅবস্থায় অসীম শ্রেণীকে ব্যবহার করা চলে না। অসীম শ্রেণীটি অপসারী না অভিসারী তাহা পরীক্ষা না করিয়া উহার ব্যবহার করা হয় না। ঐরূপ পরীক্ষা পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত।

8·11. ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক সূচকের ক্ষেত্রে দ্বিপদ উপপাদ্য ঃ*

n-ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতি নির্ণয়

n একটি ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক রাশি হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r$$

$+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত,

যদি x-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয় অর্থাৎ $-1<x<1$.

মনে কর, $f(m)=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots$

$$\therefore\quad f(n)=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots$$

এবং $f(m+n)=1+(m+n)x+\frac{(m+n)(m+n-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots$

m এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে, 8·2 অনুচ্ছেদ অনুসারে,

$f(m)=(1+x)^m$, $f(n)=(1+x)^n$ এবং $f(m+n)=(1+x)^{m+n}$.

যেহেতু m ও n-এর সমুদয় ধনাত্মক অখণ্ড মানের জন্য

$(1+x)^m\times(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$,

$$\therefore\quad \left\{1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots\right\}\left\{1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$=1+(m+n)x+\frac{(m+n)(m+n-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

এখন, দুইটি বীজগণিতীয় সসীম শ্রেণী অথবা দুইটি অসীম অভিসারী শ্রেণী গুণ করিলে, শ্রেণীগুলির ভিতরকার প্রতীকগুলির সমুদয় মানের জন্য, গুণফলের আকার একই থাকে। সুতরাং m ও n-এর সমুদয় মানের জন্য (1)-এর সত্যতা সিদ্ধ হয়, যদি x-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়**।

$\therefore$ m ও n-এর সমুদয় মানের জন্য, $f(m)\times f(n)=f(m+n)$.

---

* এই উপপাদ্যের প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত।

** এখানে শ্রেণীগুলির অভিসারী হইবার শর্ত উঠিয়াছে, কিন্তু বর্তমান পুস্তকে ইহার আলোচনা করিবার অবকাশ নাই।

$\therefore$ m, n ও p-এর সমুদয় মানের জন্য,

$$f(m)\times f(n)\times f(p)=f(m+n)\times f(p)=f(m+n+p).$$

অনুরূপভাবে, $m, n, p, \cdots\cdots t$-এর সমুদয় মানের জন্য,

$$f(m)\times f(n)\times f(p)\times\cdots\times f(t)=f(m+n+p+\cdots\cdots+t)\cdots(2)$$

(i) n একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ

মনে কর, p ও q দুইটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $n=\frac{p}{q}$.

$\therefore$ (2) হইতে, $f\left(\frac{p}{q}\right)\times f\left(\frac{p}{q}\right)\times f\left(\frac{p}{q}\right)\times\cdots\cdots q$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$$=f\left(\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\cdots\cdots\cdots q \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত }\right)$$

$$\therefore\ \left\{f\left(\frac{p}{q}\right)\right\}^q=f(p)=1+px+\frac{p(p-1)}{2\,!}x^2+\cdots\cdots=(1+x)^p.$$

[$\because$ p একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা]

$$\therefore\ (1+x)^{\frac{p}{q}}=f\left(\frac{p}{q}\right)=1+\frac{p}{q}x+\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{2\,!}x^2+\cdots\cdots$$

অতএব, $-1<x<1$ হইলে, ধনাত্মক ভগ্নাংশের সূচকের ক্ষেত্রে, দ্বিপদ উপপাদ্যের সত্যতা বর্তমান থাকে।

(ii) n একটি ঋণাত্মক রাশি (পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ)

মনে কর, m একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ এবং $n=-m$.

সুতরাং, (1) হইতে, $f(m)\times f(-m)=f(m-m)=f(0)=1$.

$\therefore$ $f(-m)=\frac{1}{f(m)}=\frac{1}{(1+x)^m}$ [$\because$ m ধনাত্মক]

সুতরাং $(1+x)^{-m}=f(-m)=1-mx+\frac{(-m)(-m-1)}{2\,!}x^2+\cdots\cdots$

অতএব, $|x|<1$ হইলে, যে-কোন ঋণাত্মক সূচকের ক্ষেত্রে দ্বিপদ উপপাদ্যের সত্যতা বর্তমান থাকে।

টীকা 1. x-এর সাংখ্যমান **1** অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে অর্থাৎ $|x|>1$ হইলে, ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক সূচকের ক্ষেত্রে দ্বিপদ উপপাদ্যের সত্যতা বর্তমান থাকে না।

টীকা 2. n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সহগগুলিকে ${}^nC_0$, ${}^nC_1$, ${}^nC_2$, $\cdots\cdots{}^nC_n$ দ্বারা সূচিত করা হয়। কিন্তু n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সহগ-

গুলিকে ঐরূপ প্রতীক চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা যায় না, কারণ n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে ^nC_r-এর কোন অর্থ হয় না।

8·12. n-ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় :

(i) মনে কর, $a > x$; $\therefore \frac{x}{a} < 1$.

$$\therefore (a+x)^n = \left\{a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$$
$$= a^n\left\{1+n.\frac{x}{a}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\cdots\right\} \quad \left[\because \frac{x}{a}<1\right]$$
$$= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \cdots\cdots$$

(ii) মনে কর, $a < x$. $\therefore \frac{a}{x} < 1$.

$$\therefore (a+x)^n = \left\{x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}^n = x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$$
$$= x^n\left\{1+n.\frac{a}{x}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\cdots\right\} \quad \left[\because \frac{a}{x}<1\right]$$
$$= x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2} + \cdots\cdots$$

8·13. কতিপয় প্রয়োজনীয় বিস্তৃতি :

$|x| < 1$ মানের জন্য, অর্থাৎ $-1 < x < 1$ হইলে,

$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত;

$(1+x)^{-n} = 1-nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত,

$(1-x)^n = 1-nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত;

$(1-x)^{-n} = 1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত।

টীকা : $(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-\cdots\cdots+(-1)^r x^r+\cdots\cdots$

$(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\cdots\cdots+x^r+\cdots\cdots$

লক্ষ্য করিবে যে, x ও n সমচিহ্নযুক্ত হইলে বিস্তৃতির প্রত্যেকটি পদ ধনাত্মক হইবে ; কিন্তু উহারা বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইলে বিস্তৃতির একান্তর পদগুলি ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হইবে।

8·14. বিস্তৃতির সাধারণ পদ ঃ

পূর্বেই আলোচিত হইয়াছে যে, সাধারণতঃ $(r+1)$-তম পদকে, অর্থাৎ t_{r+1}-কে সাধারণ পদ বলা হয়।

$(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির $t_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r\,!}x^r$, অথবা $\binom{n}{r}x^r$;

$(1+x)^{-n}$-এর বিস্তৃতির $t_{r+1}=(-1)^r.\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{r\,!}x^r$;

$(1-x)^n$-এর বিস্তৃতির

$$t_{r+1}=(-1)^r.\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r\,!}x^r \text{ অথবা } (-1)^r\binom{n}{r}x^r ;$$

$(1-x)^{-n}$-এর বিস্তৃতির $t_{r+1}=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{r\,!}x^r$.

টীকা ঃ 8·7 অনুচ্ছেদ অনুসারে অগ্রসর হইয়া বিস্তৃতির **বৃহত্তম পদ** নির্ণয় করা যায়।

8·15. দ্বিপদ উপপাদ্যেরপ্রয়োগ ঃ

গণিতশাস্ত্রে দ্বিপদ উপপাদ্যের প্রয়োগ অনেক। ইহার প্রয়োগে কতিপয় বীজগণিতীয় বা পাটীগণিতীয় রাশির আসন্ন মান নির্ণয়, কতিপয় অসীম শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয়, কতিপয় ভগ্নাংশের বিস্তৃতি প্রভৃতি নির্ণয় করা যায়। কতিপয় উদাহরণের মাধ্যমে ইহা পরের অনুচ্ছেদে দেখান হইল।

8·16. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. (a) $|x|<\frac{1}{2}$ হইলে, $(1+2x)^{-3}$-এর পঞ্চম পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

(b) $|x|<1$ হইলে, $\sqrt[3]{(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots \text{অসীম পর্যন্ত})}$-কে x-এর ঘাতের উর্ধক্রমে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। [W.B.B.H.S.]

(a) $|2x|<1$ হইলে, অর্থাৎ $|x|<\frac{1}{2}$ হইলে,

$$(1+2x)^{-3}=1+(-3)(2x)+\frac{(-3)(-3-1)}{2\,!}(2x)^2$$

$$+\frac{(-3)(-3-1)(-3-2)}{3\,!}(2x)^3+\frac{(-3)(-3-1)(-3-2)(-3-3)}{4\,!}(2x)^4+\cdots\cdots$$

[অনুচ্ছেদ 8·11 অনুসারে]

$=1-6x+\frac{3.4}{1.2}.4x^2-\frac{3.4.5}{1.2.3}.8x^3+\frac{3.4.5.6}{1.2.3.4}.16x^4-\ldots\ldots$

$=1-6x+24x^2-80x^3+240x^4-\cdots\cdots$

(b) $|x|<1$ হইলে,

$\sqrt[3]{(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots}$ অসীম পর্যন্ত)

$=\sqrt[3]{(1-x)^{-1}}=(1-x)^{-\frac{1}{3}}$

$=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)}{2!}x^2+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত

$=1+\frac{1}{3}x+\frac{1.4}{3.3.2.1}x^2+\cdots\cdots=1+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2+\cdots\cdots$

উদাহরণ 2. $(1-2x)^{-4}$-এর বিস্তৃতির পঞ্চম পদ নির্ণয় কর। উহার সাধারণ পদটিও নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

নির্ণেয় পঞ্চম পদ $=t_5=\frac{(4)(4+1)(4+2)(4+3)}{4!}(2x)^4$

$$=\frac{4.5.6.7}{4.3.2.1}.2^4x^4=560x^4.$$

নির্ণেয় সাধারণ পদ $=t_{r+1}=\frac{4(4+1)(4+2)\cdots\cdots(4+r-1)}{r!}(2x)^r$

$$=\frac{4.5.6.\cdots\cdots(3+r)}{r!}2^rx^r$$

$$=\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3!}2^rx^r.$$

উদাহরণ 3. $(1+3x+6x^2+10x^3+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত$)^{\frac{2}{3}}$-এর বিস্তৃতিতে x^6-এর এবং x^r-এর সহগ নির্ণয় কর।

$(1+3x+6x^2+10x^3+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত$)^{\frac{2}{3}}$

$=\{(1-x)^{-3}\}^{\frac{2}{3}}=(1-x)^{-2}.$

এক্ষণে, $(1-x)^{-2}$-এর বিস্তৃতিতে $t_{r+1}=\frac{2(2+1)(2+2)\cdots(2+r-1)}{r!}x^r$

$$=\frac{2.3.4.\cdots\cdots(r+1)}{r!}x^r=(r+1)x^r.$$

$\therefore$ x^r-এর সহগ $=r+1.$

সুতরাং x^6-এর সহগ $=6+1=7.$

উদাহরণ 4. $(1+3x)^{8\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতির প্রথম ঋণাত্মক পদটি নির্ণয় কর।

মনে কর, $(r+1)$-তম পদটি প্রথম ঋণাত্মক পদ।

এখানে, $\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{8\frac{1}{2}-r+1}{r}.3x=\frac{9\frac{1}{2}-r}{r}.\ 3x.$

$\therefore\ \ t_{r+1}=\frac{9\frac{1}{2}-r}{r}.3x.t_r.$

এখন, t_r এবং $3x$ ধনাত্মক। সুতরাং t_{r+1} প্রথম ঋণাত্মক পদ হইবে, যেইমাত্র $9\frac{1}{2}-r$ ঋণাত্মক হইবে, অর্থাৎ পূর্ণসংখ্যা $r>9\frac{1}{2}$ হইবে, অর্থাৎ $r=10$ হইবে।

$\therefore$ t_{r+1} অর্থাৎ t_{10+1} বা t_{11} প্রথম ঋণাত্মক পদ।

উদাহরণ 5. $x=\frac{5}{6}$ এবং $n=\frac{7}{2}$ হইলে, $(1-2x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয় কর।

$$\text{এখানে, } \frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{n-r+1}{r}.2x \text{ (সাংখ্যমানে প্রকাশিত)}$$
$$=\frac{\frac{7}{2}-r+1}{r}.2.\frac{5}{6}=\frac{45-10r}{6r}.$$

$\therefore$ $t_{r+1}>$ = অথবা $<t_r$ হইবে, যতক্ষণ $45-10r>$ = অথবা $<6r$ হইবে,

অর্থাৎ যতক্ষণ, $45>$ = অথবা $<16r$ হইবে,

অর্থাৎ যতক্ষণ, $r<$ = অথবা $>\frac{45}{16}$ বা $2\frac{13}{16}$ হইবে।

যেহেতু r একটি অখণ্ড সংখ্যা, সুতরাং r-এর 2 পর্যন্ত সকল মানের জন্য, $t_{r+1}>t_r$ হইবে অর্থাৎ $t_3>t_2>t_1$ হইবে, এবং r-এর 2 অপেক্ষা বৃহত্তর সকল অখণ্ড মানের জন্য $t_{r+1}<t_r$ হইবে অর্থাৎ $t_r>t_{r+1}$ হইবে।

সুতরাং $t_3>t_4>t_5>\cdots\cdots$ হইবে। $\therefore$ t_3 বৃহত্তম পদ।

সুতরাং নির্ণেয় বৃহত্তম পদ $=t_3=\frac{\frac{7}{2}(\frac{7}{2}-1)}{2\,!}(-2x)^2=\frac{35}{2}x^2.$

উদাহরণ 6. $y=x-x^2+x^3-x^4+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত হইলে, দেখাও যে,

$x=y+y^2+y^3+y^4+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত।

যেহেতু $y=x-x^2+x^3-x^4+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত,

$\therefore\ \ 1-y=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত

$$=(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}.$$

$\therefore\ \ 1+x=\frac{1}{1-y}=(1-y)^{-1}=1+y+y^2+y^3+y^4+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত।

$\therefore\ \ x=y+y^2+y^3+y^4+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত।

উদাহরণ 7. দেখাও যে, $1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত $=\sqrt{2}$.

বামপক্ষ $=1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{2\,!}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{1.3.5}{3\,!}\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত

$=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2\,!}(\frac{1}{2})^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3\,!}(\frac{1}{2})^3+\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত

$=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{2\,!}(\frac{1}{2})^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{3\,!}(\frac{1}{2})^3+\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত

$=(1-\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}=(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 8. (a) দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করিয়া চারি দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt[7]{127}$-এর মান নির্ণয় কর।

(b) যদি x এরূপ একটি ক্ষুদ্ররাশি হয়, যাহাতে x-এর দ্বিঘাত ও উচ্চতর ঘাতসমূহকে উপেক্ষা করা যায়, তাহা হইলে দেখাও যে, $\frac{1+2x}{1-3x}=1+5x$ (প্রায়)।

(a) $\sqrt[7]{127}=(128-1)^{\frac{1}{7}}=\left\{128\left(1-\frac{1}{128}\right)\right\}^{\frac{1}{7}}=\left\{2^7\left(1-\frac{1}{128}\right)\right\}^{\frac{1}{7}}$

$=2\left(1-\frac{1}{128}\right)^{\frac{1}{7}}$

$=2\left\{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{128}+\frac{\frac{1}{7}(\frac{1}{7}-1)}{2\,!}\left(\frac{1}{128}\right)^2-\frac{\frac{1}{7}(\frac{1}{7}-1)(\frac{1}{7}-2)}{3\,!}\left(\frac{1}{128}\right)^3+\cdots\cdots\right\}$

$=2(1-\cdot00111-\cdot000003-\cdots\cdots)=1\cdot9978$ (প্রায়)।

(b) $\frac{1+2x}{1-3x}=(1+2x)(1-3x)^{-1}=(1+2x)(1+3x+9x^2+\cdots\cdots)$

$=(1+2x)(1+3x)$ (প্রায়) [$\because x^2, x^3, \cdots$ উপেক্ষণীয়]

$=1+2x+3x$ (প্রায়)।

$\therefore \frac{1+2x}{1-3x}=1+5x$ (প্রায়)।

প্রশ্নমালা VIII(B)

1. চতুর্থপদ পর্যন্ত বিস্তার কর :

(i) $(1+x^2)^{-2}$. (ii) $\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. (iii) $\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}$.

(iv) $(x-x^2)^{-\frac{4}{3}}$. (v) $(1-3x)^{\frac{1}{3}}$. (vi) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

2. x-এর ঘাতের উর্ধক্রমে x^4 পর্যন্ত বিস্তার কর :

(i) $(2-x)^{\frac{2}{3}}$. (ii) $(3+2x)^{-\frac{3}{4}}$. (iii) $(1-x)^{-3}$. (iv) $(1+x)^{\frac{1}{5}}$.

3. x-এর ঘাতের উর্ধক্রমে পঞ্চম পদ পর্যন্ত $(2-3x)^{-3}$-কে বিস্তৃত কর এবং x-এর মানের আবশ্যক সীমার উল্লেখ কর। [W.B.B.H.S.]

4. $\frac{1+x}{(1-x)^3}+\frac{1-x}{(1+x)^3}$-কে 3টি পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর। এই বিস্তৃতির সংগত হইবার শর্ত উল্লেখ কর। [C. P. U.]

5. $\sqrt{(1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots}$অসীম পর্যন্ত)-কে x-এর ঘাতের উর্ধক্রমে ষষ্ঠপদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

6. $\frac{1}{\sqrt{(1-x+x^2)}}$-কে এবং $\frac{1}{(1-x)^2\sqrt{(1+x)}}$-কে x-এর ঘাতের উর্ধক্রমে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

7. $x>1$ হইলে, $(1+x)^{-1}$-কে বিস্তৃত কর।

8. $(4+3x)^{\frac{3}{2}}$-এর বিস্তৃতির সপ্তম পদটি লিখ।

9. (a) $(1-x)^{-4}$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদটি নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S]

(b) $(1-2x)^{-\frac{3}{2}}$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদটি কত ? [W.B.B.H.S.]

10. (a) $(1+2x)^{\frac{5}{2}}$-এর বিস্তৃতির x^6-এর সহগ নির্ণয় কর।

(b) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$-এর বিস্তৃতিতে x^{10}-এর সহগ নির্ণয় কর।

11. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগ নির্ণয় কর :

(i) $(1-2x)^{-1}$. (ii) $(1-x)^{-(m+1)}$. (iii) $(1-mx)^{-\frac{1}{m}}$.

(iv) $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$. (v) $\frac{1+4x^2+x^4}{(1-x)^4}$. (vi) $\frac{x}{(1-2x)(1-3x)}$.

(vii) $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^2$. (viii) $(1-2x+3x^2-4x^3+\cdots)^{-n}$.

12. (a) দেখাও যে, $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতির x^r-এর সহগ $\frac{(2r)!}{(r!)^2}$.

(b) প্রমাণ কর যে, $(1-9x+20x^2)^{-1}$-এর বিস্তৃতির x^m-এর সহগ $5^{m+1}-4^{m+1}$.

(c) দেখাও যে, $(1-x+x^2-x^3)^{-1}$-এর বিস্তৃতিতে x^4-এর সহগ 1.

(d) দেখাও যে, $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots)^{\frac{3}{4}}$-এর বিস্তৃতির x^n-এর সহগ এবং $(1+3x+6x^2+10x^3+\cdots)^{\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতির x^n-এর সহগ পরস্পর সমান।

(e) দেখাও যে, $\frac{x}{1+x+x^2}$-এর বিস্তৃতিতে, x^{3n+1}, x^{3n+2} এবং x^{3n+3}-এর সহগগুলি যথাক্রমে $1, -1$ এবং 0.

13. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের বিস্তৃতির প্রথম ঋণাত্মক পদটি নির্ণয় কর :

(i) $(1+3x)^{\frac{5}{3}}$. (ii) $(1+2a)^{\frac{5}{2}}$. (iii) $(1+x)^{\frac{10}{3}}$.

14. (a) দেখাও যে, $(1+2x)^{3\cdot5}$-এর বিস্তৃতিতে ষষ্ঠ পদটি প্রথম ঋণাত্মক পদ এবং উহার সহগ $-\frac{7}{8}$.

(b) প্রমাণ কর যে, $(1+x)^{\frac{41}{3}}$-এর বিস্তৃতিতে প্রথম 15টি পদ ধনাত্মক।

15. $x=\frac{1}{6}$ হইলে, $(1-2x)^{-7}$-এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমান হিসাবে বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর।

16. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয় কর :

(i) $(1+\frac{2}{3})^{-\frac{31}{5}}$. (ii) $(1-x)^{-\frac{5}{3}}$, যখন $x=\frac{6}{7}$.

(iii) $(2+3x)^{-n}$, যখন $x=\frac{1}{2}$ এবং $n=3\frac{2}{3}$.

17. $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতির কত তম পদটি $(1-x)^{\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতির সেই তম পদের 15 গুণ ?

18. t_n দ্বারা $(1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ সূচিত হইলে, দেখাও যে,

$$t_0+t_1+t_2+\cdots\cdots=(1-4x)^{-\frac{1}{2}}.$$

19. (a) $y=2x-3x^2+4x^3-\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$x=\tfrac{1}{2}y+\tfrac{3}{8}y^2+\tfrac{5}{16}y^3+\cdots\cdots \text{অসীম পর্যন্ত।}$$

(b) $y=3x+6x^2+10x^3+\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$x=\frac{y}{3}-\frac{1.4}{3^2.2!}y^2+\frac{1.4.7}{3^3.3!}y^3-\cdots\cdots$$

(c) $y=x+x^2+2x^3+\cdots\cdots+\frac{(2n)!}{n!.(n+1)!}x^{n+1}+\cdots\cdots$হইলে, প্রমাণ কর যে, $y^2-y+x=0$.

20. প্রমাণ কর :

(i) $(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots)(1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots)$
$=1+x^2+x^4+x^6+\cdots\cdots$

(ii) $(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots)^2=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$

(iii) $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots)(1-2x+3x^2-4x^3+\cdots\cdots)$
$=1+2x^2+3x^4+4x^6+\cdots\cdots$

21. (a) প্রমাণ কর যে,

(i) $(1+x)^2=1+\frac{2x}{1+x}+\frac{3x^2}{(1+x)^2}+\frac{4x^3}{(1+x)^3}+\cdots\cdots$

$\left[(1+x)^2=\left(\frac{1}{1+x}\right)^{-2}=\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{-2}=\cdots\cdots\right]$

(ii) $x^3=1+3\left(1-\frac{1}{x}\right)+6\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+\cdots\cdots$

$\left[x^3=\left(\frac{1}{x}\right)^{-3}=\left\{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}^{-3}=\cdots\cdots\right]$

(iii) $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n=1+n\left(\frac{2x}{1+x}\right)+\frac{n(n+1)}{2!}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2+\cdots\cdots$

(iv) $2^n(1+x)^{-n}-1=n\frac{1-x}{1+x}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2+\cdots\cdots$

(b) $(1-x)^{-n}$-এর বিস্তৃতির প্রথম $(r+1)$-সংখ্যক পদের সহগগুলির সমষ্টি

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}{r!}.$$

22. অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত নিম্নের শ্রেণীগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $1-\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}-\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots\cdots$ (ii) $1+\frac{1}{4}+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.4.7}{4.8.12}+\cdots$

[প্রদত্ত শ্রেণী $=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}(\frac{1}{2})^2-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3!}(\frac{1}{2})^3+\cdots\cdots=(1+\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}=\cdots\cdots$
$1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}(\frac{1}{3})^2-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3!}(\frac{1}{2})^3+\cdots\cdots$]

(iii) $1-\frac{1}{4}-\frac{1.1}{4.8}-\frac{1.1.3}{4.8.12}-\frac{1.1.3.5}{4.8.12.16}-\cdots\cdots$

(iv) $2+\frac{5}{2!.3}+\frac{5.7}{3!.3^2}+\frac{5.7.9}{4!.3^3}+\cdots\cdots$

23. প্রমাণ কর যে,

(i) $\sqrt{8}=1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots$ [C.P.U.]

(ii) $\sqrt{\frac{3}{2}}=1+\frac{1}{6}+\frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{1}{6^2}+\frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{6^3}+\cdots\cdots$

(iii) $2^n=1+\frac{n}{2}+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$

(iv) $\sqrt{\frac{3}{5}}=1-\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{4}{9}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{8}{27}+\cdots\cdots$

(v) $\sqrt[3]{1\cdot5}=1+\frac{1}{6}-\frac{1.2}{6.12}+\frac{1.2.5}{6.12.18}-\frac{1.2.5.8}{6.12.18.24}+\cdots\cdots$

(vi) $2^{\frac{4}{3}}=1+\frac{4}{6}+\frac{4.5}{6.9}+\frac{4.5.6}{6.9.12}+\cdots\cdots$

(vii) $\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2)=\frac{5}{3.6}+\frac{5.7}{3.6.9}+\frac{5.7.9}{3.6.9.12}+\cdots\cdots$

(viii) $\frac{x}{\sqrt{(1+x)}}=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3$
$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4+\cdots\cdots (x > -\frac{1}{2}).$

24. দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করিয়া চারি দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর :

(i) $\sqrt{(\cdot99)}$. (ii) $\sqrt[3]{1001}$. (iii) $\sqrt[4]{624}$. (iv) $\frac{(1\cdot004)^2}{(\cdot998)^3}$.

25.(a) যদি x এরূপ একটি ক্ষুদ্ররাশি হয়, যাহাতে x-এর দ্বিঘাত ও উচ্চতর ঘাত সমূহকে উপেক্ষা করা যায়, তাহা হইলে দেখাও যে,

$\frac{1-x}{1+x}=1-2x$ (প্রায়) এবং $\frac{\sqrt{(1+x)}}{\sqrt[4]{(1-2x)}}=1+x$ (প্রায়)।

(b) যদি c এরূপ একটি ক্ষুদ্ররাশি হয়, যাহাতে c^4-কে l^4-এর তুলনায় উপেক্ষা করা যায়, তাহা হইলে দেখাও যে, $\sqrt{\left(\frac{l}{l+c}\right)}+\sqrt{\left(\frac{l}{l-c}\right)}=2+\frac{3c^2}{4l^2}$ (প্রায়)।

(c) a প্রায় b-এর সমান হইলে, দেখাও যে, $\sqrt[5]{\frac{a}{b}}=\frac{3a+2b}{2a+3b}$ (প্রায়)।

(d) z যদি এরূপ একটি বৃহৎ রাশি হয় যে, $\frac{1}{z^5}$-এর মান উপেক্ষণীয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\sqrt{(z^2+1)}-\sqrt{(z^2-1)}$, প্রায় $\frac{1}{z}$-এর সমান।

নবম অধ্যায়

অসীম শ্রেণী ও অসীম গুণোত্তর শ্রেণী

(Infinite Series and Infinite Geometrical Series)

9·1. অসীম শ্রেণী ঃ

যে-শ্রেণীর পদসংখ্যা নির্দিষ্ট অর্থাৎ সসীম, তাহাকে **সসীম** (Finite) শ্রেণী বলে। পদের সংখ্যা সসীম হইলে যোগফলও সসীম হইবে। সেজন্য সকল সসীম শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করা যায়। প্রগতি বিষয়ক অধ্যায়ে আমরা ইহা প্রত্যক্ষ করিয়াছি। কোন শ্রেণীর পদসংখ্যা সসীম না হইলে, তাহাকে **অসীম** (Infinite) শ্রেণী বলে। পদের সংখ্যা সসীম না হইলে, শ্রেণীটির যোগফল সসীম হইতেও পারে, নাও হইতে পারে। সেজন্য সকল অসীম শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

পূর্বের অধ্যায়ে অভিসারী এবং অপসারী শ্রেণীর উল্লেখমাত্র করা হইয়াছে। এক্ষণে উহাদের প্রকৃতি নির্ধারণের উপায় সম্পর্কে সংক্ষেপে আলোচনা করা হইবে।

যে-অসীম শ্রেণীর যোগফল সসীম এবং নির্দিষ্ট, তাহাকে **অভিসারী** (Convergent) অসীম শ্রেণী বলা হয়। যেমন, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত শ্রেণীটির যোগফল 2 ; সুতরাং শ্রেণীটি অভিসারী। কোন অভিসারী অসীম শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n, উহার পদসংখ্যা n সীমাহীন ভাবে বৃদ্ধি পাইলেও, কখনই একটি নির্দিষ্ট সসীম রাশিকে অতিক্রম করিতে পারে না। S_n-এর এই সীমাস্থ মানই (Limiting value) অসীম শ্রেণীটির যোগফল।

যে-সমুদয় অসীম শ্রেণীর যোগফল সসীম নহে (অর্থাৎ অনির্দিষ্ট), তাহারা দুই প্রকারের হইতে পারে—**অপসারী** (Divergent) অসীম শ্রেণী এবং **দোদুল্যমান** (Oscillatory) অসীম শ্রেণী।

যে-অসীম শ্রেণীর পদসংখ্যা n সীমাহীন ভাবে বর্দ্ধিত হইলে, উহার প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n ক্রমাগত বৃদ্ধি পাইয়া পূর্ব নির্দিষ্ট যে-কোন বৃহৎ সংখ্যাকে ছাড়াইয়া যায়, তাহাকে অপসারী অসীম শ্রেণী বলে।

উদাহরণস্বরূপ, $1+2+3+4+\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত।

যে-অসীম শ্রেণীর পদসংখ্যা n ক্রমশঃ বর্ধিত হইয়া অনন্তের দিকে অগ্রসর হইলে, উহার প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি দুইটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে একবার উচ্চ সীমার দিকে এবং পরের বার নিম্নসীমার দিকে যাইয়া দোলকের ন্যায় দুলিতে থাকে, তাহাকে **দোদুল্যমান** অসীম শ্রেণী বলে। উদাহরণস্বরূপ, $1-1+1-1+\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত গুণোত্তর শ্রেণীটি 0 ও 1 সীমাদ্বয়ের মধ্যে দোদুল্যমান।

9·2. অসীম শ্রেণীর অভিসারী হইবার পরীক্ষা* ঃ
গণিতে অসীম শ্রেণীর ভূমিকা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। সেই কারণে কোন অসীম শ্রেণী অভিসারী না অপসারী তাহা পরীক্ষা করিবার কিছু প্রণালী জানা আবশ্যক।

কোন অসীম শ্রেণীর পদসংখ্যা n ক্রমশঃ বর্ধিত হইয়া অনন্তের দিকে অগ্রসর হইলে (অর্থাৎ $n\to\infty$ হইলে) যদি উহার $(n+1)$-তম পদের এবং n-তম পদের অনুপাত অর্থাৎ $\frac{t_{n+1}}{t_n}$-এর সীমাস্থ মান k হয়, তাহা হইলে k-এর পরম মান অর্থাৎ $|k|$, 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, শ্রেণীটি অভিসারী হইবে এবং $|k|>1$ হইলে, শ্রেণীটি অপসারী হইবে। $|k|=1$ হইলে, শ্রেণীটি অভিসারী হইবে কি অপসারী হইবে তাহা নির্ণয় করা সম্ভব নয়। শেষোক্ত ক্ষেত্রে অন্য পরীক্ষার প্রয়োজন।

ইহা **ডালেম্বার্টের (D' Alembert) অনুপাত-পরীক্ষা** নামে পরিচিত।

উদাহরণস্বরূপ, $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{4.2^4}+\cdots\cdots$ অসীম শ্রেণীটি অভিসারী ;

কারণ, এখানে $\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{\frac{1}{(n+1).2^{n+1}}}{\frac{1}{n.2^n}}=\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\to\frac{1}{2}(<1)$, যদি $n\to\infty$ হয়।

অনুরূপভাবে দেখা যায় যে, $2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\frac{2^4}{4}+\cdots$ অসীম শ্রেণীটি অপসারী ;

কারণ, এখানে $\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{2^{n+1}/(n+1)}{2^n/n}=\frac{2n}{n+1}=\frac{2}{1+\frac{1}{n}}\to 2\ (>1)$, যদি $n\to\infty$ হয়।

টীকা ঃ যে-কোন অভিসারী শ্রেণীর পদসংখ্যা n-এর ক্রমশঃ বৃদ্ধিতে উহার n-তম পদ, t_n ক্রমশঃ হ্রাস পাইবে। অবশেষে, n-অসীমের দিকে অগ্রসর হইলে, t_n শূন্যের দিকে অগ্রসর হইবে অর্থাৎ $n\to\infty$ হইলে, $t_n\to 0$ হইবে।

ইহার বিপরীত তথ্যটি সত্য নয়, অর্থাৎ কোন অসীম শ্রেণীর পদসংখ্যা $n\to\infty$ হইলে যদি উহার n-তম পদ $t_n\to 0$ হয়, তাহা হইলে বলা যায় না যে, শ্রেণীটি অভিসারী।

উদাহরণস্বরূপ, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$ শ্রেণীটির n-তম পদ $\frac{1}{n}\to 0$, যদি $n\to\infty$ হয় ; কিন্তু শ্রেণীটি অভিসারী নয়।

অপর দিকে, $n\to\infty$ হইলে, যদি $t_n\to 0$ না হয়, তাহা হইলে বলা যায় যে, শ্রেণীটি অভিসারী নয়। উদাহরণস্বরূপ, 1, 3, 9, 27,$\cdots\cdots$ শ্রেণীটির n-তম পদ $3^{n-1}\to\infty$, যদি $n\to\infty$ হয়। সুতরাং শ্রেণীটি অভিসারী নয়।

---

* ইহা পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত।

9·3. অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয় ঃ

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীটি হইল $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত এবং শ্রেণীটির প্রথম n-পদের সমষ্টি হইল S_n.

শ্রেণীটির প্রথম পদ$=a$ এবং সাধারণ অনুপাত$=r$. সুতরাং,

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

এখন, r-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে অর্থাৎ $|r|>1$ হইলে, n-এর বৃদ্ধিতে r^n বৃদ্ধি পাইবে এবং $n\to\infty$ হইলে, $r^n\to\infty$ হইবে। সুতরাং $|r|>1$ হইলে শ্রেণীটির সমষ্টি সসীম হইবে না।

আবার, $r=1$ হইলে, $S_n=a+a+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত$=na$ এবং $n\to\infty$ হইলে, $S_n\to\infty$ হইবে। সুতরাং $r=1$ হইলেও শ্রেণীটির সমষ্টি সসীম হইবে না।

কিন্তু r-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে অর্থাৎ $|r|>1$ হইলে, n-এর ক্রমশঃ বৃদ্ধিতে r^n ক্রমশঃ হ্রাস পাইবে এবং $n\to\infty$ হইলে, $r^n\to 0$ হইবে, অর্থাৎ

$\frac{ar^n}{1-r}\to 0$ হইবে ; সুতরাং $S_n\to\frac{a}{1-r}$ হইবে।

সুতরাং $|r|<1$ হইলে, অসীম গুণোত্তর শ্রেণীটি অভিসারী হইবে এবং উহার যোগফল হইবে $\frac{a}{1-r}$.

টীকা ঃ পাটীগণিতের আবৃত্ত (recurring) দশমিক, অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর একটি প্রকৃষ্ট উদাহরণ। সুতরাং উপরের সূত্রের সাহায্যে যে-কোন আবৃত্ত দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করা যায়। উদাহরণস্বরূপ, $\cdot 3\dot{5}$-কে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিতে হইলে,

$\cdot 3\dot{5} = \cdot 35555\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত

$= \cdot 3+\cdot 05+\cdot 005+\cdot 0005+\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত

$=\frac{3}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{5}{10000}+\cdots\cdots$অসীম পর্যন্ত

$=\frac{3}{10}+\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{200}+\frac{1}{2000}+\cdots\cdots\right.$অসীম পর্যন্ত$\left.\right)$।

প্রথম বন্ধনীর অন্তর্গত অসীম গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ $\frac{1}{20}$ এবং সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10}(<1)$.

$$\therefore\ \cdot 3\dot{5}=\frac{3}{10}+\frac{\frac{1}{20}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}+\frac{\frac{1}{20}}{\frac{9}{10}}=\frac{3}{10}+\frac{1}{18}=\frac{27+5}{90}=\frac{32}{90}=\frac{16}{45}.$$

এই ভগ্নাংশটি পাটীগণিতের নিয়মানুসারে প্রদত্ত ভগ্নাংশের সহিত সমান হইবে।

9·4. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত শ্রেণীটির সমষ্টি নির্ণয় কর।

এখানে, প্রথম পদ $=a=1$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r=\frac{1}{2}$.

$r=\frac{1}{2}<1$ বলিয়া, অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত শ্রেণীটির সমষ্টি $=\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$

উদাহরণ 2. $\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\frac{2}{5^5}+\frac{3}{5^6}+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত শ্রেণীটির সমষ্টি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত শ্রেণী $=\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{5^3}+\frac{2}{5^5}+\cdots\cdots\right)+\left(\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^4}+\frac{3}{5^6}+\cdots\cdots\right).$

এক্ষণে, প্রথম গুণোত্তর শ্রেণীটির

প্রথম পদ $=\frac{2}{5}$ এবং সাধারণ অনুপাত $=\frac{2}{5^3}\div\frac{2}{5}=\frac{1}{25}(<1)$

এবং দ্বিতীয় গুণোত্তর শ্রেণীটির

প্রথম পদ $=\frac{3}{5^2}=\frac{3}{25}$ এবং সাধারণ অনুপাত $=\frac{3}{5^4}\div\frac{3}{5^2}=\frac{1}{25}(<1).$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=\dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}+\dfrac{\frac{3}{25}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{2}{5}\times\frac{25}{24}+\frac{3}{25}\times\frac{25}{24}=\frac{5}{12}+\frac{1}{8}=\frac{13}{24}.$

উদাহরণ 3. $-1<a<1$ হইলে, $1+4a+7a^2+10a^3+\cdots\cdots$ অসীম শ্রেণীটির সমষ্টি নির্ণয় কর।

ইহা একটি সমান্তরীয় গুণোত্তর শ্রেণী।

নির্ণেয় সমষ্টি S হইলে, $\quad S=1+4a+7a^2+10a^3+\cdots\cdots$

গুণোত্তর অংশের সাধারণ অনুপাত a দ্বারা গুণ করিলে,

$$aS=\quad a+4a^2+7a^3+\cdots\cdots$$

$\therefore$ বিয়োগ করিলে, $S(1-a)=1+3a+3a^2+3a^3+\cdots\cdots$

$$=1+(3a+3a^2+3a^3+\cdots\cdots)$$

$$=1+\frac{3a}{1-a}=\frac{1+2a}{1-a}.$$

$$\therefore\quad S=\frac{1+2a}{(1-a)^2}.$$

উদাহরণ 4. অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত যে-গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি $\frac{1}{3}$ এবং দ্বিতীয় পদ $-\frac{1}{4}$, সেই গুণোত্তর শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{1}{3}$ অর্থাৎ $3a=1-r \quad \cdots \quad (1)$

এবং $ar=-\frac{1}{4} \quad \cdots \quad (2)$

(1) ও (2) হইতে a অপনয়ন করিলে,

$4r(1-r)=-3$, অর্থাৎ $4r^2-4r-3=0$

অথবা, $(2r-3)(2r+1)=0$. $\therefore\ r=\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$.

$\frac{3}{2}>1$ বলিয়া, $r=\frac{3}{2}$ গ্রহণযোগ্য নহে। $\therefore\ r=-\frac{1}{2}$.

$\therefore$ (2) হইতে, $a=\frac{1}{2}$.

সুতরাং শ্রেণীটি হইল $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\cdots$ অসীম পর্যন্ত।

প্রশ্নমালা IX

অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত নিম্নের শ্রেণীগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর **(1 – 16)**:

1. $9+6+4+\cdots\cdots$ **2.** $25-20+16-\cdots\cdots$

3. $\frac{25}{32}+\frac{5}{8}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\cdots\cdots$ **4.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{2}{25}-\cdots$

5. $1+\dot{}1+\dot{}01+001+\cdots\cdots$ **6.** $2-\dot{}2+\dot{}02-\dot{}002+\cdots\cdots$

7. $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots\cdots$ **8.** $1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots\cdots$

9. $(2+\sqrt{3})+1+(2-\sqrt{3})+\cdots\cdots$

10. $(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})+(5\sqrt{2}-7)+\cdots\cdots$

11. $1-\frac{x}{1+x}+\frac{x^2}{(1+x)^2}-\cdots\cdots(x>0)$.

12. $\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{a}{x^3}+\frac{b}{x^4}+\cdots\cdots(|x|>1)$.

13. $\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{2}{3^4}+\cdots\cdots$

14. $1+2a+3a^2+4a^3+\cdots\cdots(|a|<1)$.

15. $2+5x+8x^2+11x^3+\cdots\cdots(|x|<1)$.

16. $1-5x+9x^2-13x^3+\cdots\cdots(-1<x<1)$.

17. দেখাও যে, $a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{1}{8}}\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত $=a$.

18. নিম্নের আবৃত্ত দশমিকগুলিকে অসীম গুণোত্তর শ্রেণীতে প্রকাশ করিয়া তাহাদের সাহায্যে ঐ সকল দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত কর:

(i) $\dot{}\dot{3}$. (ii) $\dot{}\dot{3}\dot{6}$. (iii) $\dot{}4\dot{9}$. (iv) $1\dot{}2\dot{2}\dot{7}$.

19. কোন অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি $3\frac{1}{8}$ এবং দ্বিতীয় পদ $\frac{1}{2}$ হইলে, শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

20. একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি $\frac{1}{3}$ এবং প্রথম দুইটি পদের সমষ্টি $\frac{1}{4}$ হইলে, শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

21. কোন অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি 2 এবং পদগুলির বর্গের সমষ্টি $1\frac{1}{3}$ হইলে, শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

22. একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি $1\frac{1}{2}$ এবং পদগুলির ঘনফলের সমষ্টি $1\frac{1}{26}$ হইলে, শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

23. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, প্রথম n-পদের সমষ্টি S_n এবং অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত শ্রেণীটির সমষ্টি s হইলে, দেখাও যে, $S_n = s\left\{1 - \left(1 - \frac{a}{s}\right)^n\right\}$.

24. বৃক্ষ রোপন করিবার এক বৎসর পরে একটি বৃক্ষের দৈর্ঘ্য $\frac{1}{4}$ মিটার হইল। ইহার পর প্রতি বৎসর বৃক্ষটি পূর্ববর্তী বৎসরের বৃদ্ধির $\frac{49}{50}$ অংশ বৃদ্ধি পাইলে, দেখাও যে বৃক্ষটির দৈর্ঘ্য কখনও $12\frac{1}{2}$ মিটারের বেশী হইবে না।

25.(a) দেখাও যে, নিম্নের অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত শ্রেণীগুলি অভিসারী :

(i) $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \cdots\cdots$ [শ্রেণীটির সমষ্টি $= \frac{2}{1-\frac{1}{4}} =$ সসীম। সুতরাং$\cdots$]

(ii) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \cdots\cdots$

[শ্রেণীটির সমষ্টি $= (1 - \frac{2}{3})^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} =$ সসীম। সুতরাং......]

(iii) $\frac{1}{2.2} + \frac{1}{5.2^2} + \frac{1}{10.2^3} + \cdots\cdots$

[এখানে $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{1}{2^n}} = \frac{n^2+1}{2\{(n+1)^2+1\}} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}\right\}} \to \frac{1}{2}(<1)$,

যদি $n \to \infty$ হয়। সুতরাং......]

(b) দেখাও যে, নিম্নের অসীম শ্রেণীগুলি অপসারী :

(i) $4 + 6 + 9 + \cdots\cdots$

[এখানে $t_n \to \infty$, যদি $n \to \infty$ হয়। সুতরাং......]

(ii) $\frac{3}{1.2} + \frac{3^2}{3.4} + \frac{3^3}{5.6} + \frac{3^4}{7.8} + \cdots\cdots$

[এখানে $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}}{\frac{3^n}{(2n-1).2n}} = \frac{3n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} = \frac{3\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)} \to 3(>1)$,

যদি $n \to \infty$ হয়। সুতরাং......]

দশম অধ্যায়

লগারিদ্‌ম্

(Logarithm)

10·1. সংজ্ঞা : একটি নির্দিষ্ট রাশির কোন ঘাত অপর একটি নির্দিষ্ট রাশির সমান হইলে, সেই ঘাতের সূচককে দ্বিতীয় রাশির **লগারিদ্‌ম্** বলে, যাহার **নিধান** (base) হইবে প্রথম রাশি।

$a^x = N$ ($a > 0, a \neq 1$) হইলে, সূচক x-কে a নিধান সাপেক্ষে N রাশিটির লগারিদ্‌ম্ বলা হয় এবং লেখা হয়, $x = \log_a N.$

সুতরাং $x = \log_a N$ হইলে, $N = a^x.$

বিপরীতক্রমে, $a^x = N$ হইলে, $x = \log_a N.$

উদাহরণস্বরূপ, $3^2 = 9$, সুতরাং $\log_3 9 = 2$; $2^{-3} = \frac{1}{8}$, সুতরাং $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; ইত্যাদি।

ভিন্ন ভিন্ন নিধান লইলে একই রাশির ভিন্ন ভিন্ন লগারিদ্‌ম্ পাওয়া যায়। যেমন, $2^4 = 16$, সুতরাং $\log_2 16 = 4$; আবার, $4^2 = 16$, সুতরাং $\log_4 16 = 2.$

এইজন্য কোন রাশির লগারিদ্‌মে নিধানের উল্লেখের নিতান্ত প্রয়োজন ; তবে কোন প্রশ্নে সমুদয় লগারিদ্‌মগুলির একই নিধান হইলে, সুবিধার জন্য ঐ নিধানটিকে উহ্য রাখা চলে।

অনুসিদ্ধান্ত : (i) $a^x = N$ হইলে, $x = \log_a N.$ $\therefore$ $a^{\log_a N} = N.$

(ii) $a(\neq 0)$-এর যে-কোন নির্দিষ্ট বাস্তব মানের জন্য $a^0 = 1$, $\therefore$ $\log_a 1 = 0$; অর্থাৎ 0 ও ∞ ব্যতীত যে-কোন বাস্তব নিধানের সাপেক্ষে 1-এর লগারিদ্‌ম্ শূন্য।

(iii) $a(\neq 0)$ যে-কোন রাশি হইলে, $a^1 = a.$ $\therefore$ $\log_a a = 1$; অর্থাৎ 0 ও 1 ব্যতীত যে-কোন নিধানের সাপেক্ষে উহার সমান রাশির লগারিদ্‌ম্ এক।

টীকা : (i) a ধনাত্মক বাস্তব হইলে x-এর যে-কোন মানের জন্যই a^x কখনও একটি ঋণাত্মক রাশির সমান হয় না। সুতরাং নিধান ধনাত্মক বাস্তব হইলে কোন ঋণাত্মক রাশির লগারিদ্‌ম্ কাল্পনিক হইবে।

(ii) $a > 1$ হইলে, $a^x \to 0$ হয়, যদি $x \to -\infty$ হয়

এবং $a < 1$ হইলে, $a^x \to 0$ হয়, যদি $x \to +\infty$ হয়।

$\therefore$ $\log_a 0 \to -\infty$, যদি $a > 1$ হয় এবং $\log_a 0 \to +\infty$, যদি $a < 1$ হয়।

(iii) $a>1$ হইলে, $a^x \to \infty$ হয়, যদি $x \to +\infty$ হয়,

এবং $a<1$ হইলে, $a^x \to \infty$ হয়, যদি $x \to -\infty$ হয়।

$\therefore$ $\log_a \infty \to \infty$, যদি $a>1$ হয় এবং $\log_a \infty \to -\infty$, যদি $a<1$ হয়।

10·2. লগারিদমের ধর্মাবলী ঃ

(i) **দুইটি রাশির গুণফলের লগারিদম্ রাশি দুইটির লগারিদম্দ্বয়ের সমষ্টির সমান ; অর্থাৎ**

$$\log_a(m \times n) = \log_a m + \log_a n.$$

মনে কর, $\log_a (m \times n) = x$, $\log_a m = y$ এবং $\log_a n = z$.

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $a^x = m \times n$, $a^y = m$ এবং $a^z = n$.

$\therefore$ $a^x = m \times n = a^y \times a^z = a^{y+z}$.

$\therefore$ $x = y + z$; অর্থাৎ $\log_a (m \times n) = \log_a m + \log_a n$.

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\log_a(m \times n \times p) = \log_a\{m \times (n \times p)\} = \log_a m + \log_a(n \times p)$
$= \log_a m + \log_a n + \log_a p$.

সাধারণভাবে, $\log_a(m.n.p.q \cdots\cdots) = \log_a m + \log_a n + \log_a p + \log_a q + \cdots\cdots$

অর্থাৎ যে-কোন সংখ্যক রাশির গুণফলের লগারিদম্, রাশিগুলির প্রত্যেকটির লগারিদমের সমষ্টির সমান।

(ii) **দুইটি রাশির ভাগফলের লগারিদম্, উহার লবের লগারিদম্ এবং হরের লগারিদমের অন্তরের সমান ; অর্থাৎ**

$$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n.$$

মনে কর, $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = x$, $\log_a m = y$ এবং $\log_a n = z$.

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $a^x = \frac{m}{n}$, $a^y = m$ এবং $a^z = n$.

$\therefore$ $a^x = \frac{m}{n} = \frac{a^y}{a^z} = a^{y-z}$.

$\therefore$ $x = y - z$; অর্থাৎ $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$.

(iii) **একটি রাশির কোন ঘাতের লগারিদম্, ঐ ঘাতের সূচক ও রাশিটির লগারিদমের গুণফলের সমান ; অর্থাৎ**

$$\log_a(m)^n = n \log_a m.$$

মনে কর, $\log_a(m)^n = x$ এবং $\log_a m = y$.

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $a^x = m^n$ এবং $a^y = m$.

$\therefore$ $a^x = m^n = (a^y)^n = a^{ny}$.

$\therefore$ $x = ny$; অর্থাৎ $\log_a(m)^n = n \log_a m$.

টীকা : লগারিদ্‌মের ধর্মাবলী হইতে দেখা যায় যে, গুণন, ভাগ, উদ্‌ঘাতন (Involution) এবং মূলাকর্ষণ (Evolution) লগারিদ্‌মের সাহায্যে শুধু যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়া দ্বারাই সম্পন্ন করা যায়।

10·3. নিধানের পরিবর্তন :

দুইটি পৃথক নিধানের সাপেক্ষে একই রাশির লগারিদ্‌মের পারস্পরিক সূত্রটি হইল

$$\log_a m = \log_b m \times \log_a b.$$

মনে কর, $\log_a m = x$, $\log_b m = y$ এবং $\log_a b = z$.

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $a^x = m$, $b^y = m$ এবং $a^z = b$.

$$\therefore \quad a^x = m = b^y = (a^z)^y = a^{yz}.$$

$\therefore \quad x = yz$; অর্থাৎ $\log_a m = \log_b m \times \log_a b$.

একটি নিধানের সাপেক্ষে কোন রাশির লগারিদ্‌ম্ জানা থাকিলে, এই সূত্রের সাহায্যে, অপর একটি নিধানের সাপেক্ষে রাশিটির লগারিদ্‌ম্ জানা যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত : উপরের সূত্রে, $m = a$ বসাইলে,

$$\log_b a \times \log_a b = 1 \qquad (\because \log_a a = 1)$$

অর্থাৎ $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$.

সুতরাং $\log_a m = \log_b m \times \log_a b$ হইতে,

$$\log_a m = \log_b m \times \frac{1}{\log_b a} = \frac{\log_b m}{\log_b a}.$$

অতএব b-নিধানের সাপেক্ষে m ও a-এর লগারিদ্‌মদ্বয় জানা থাকিলে, $\log_b m$-কে $\dfrac{1}{\log_b a}$ দ্বারা গুণ করিয়া, a-নিধানের সাপেক্ষে m-এর লগারিদ্‌ম্ পাওয়া যাইবে। এস্থলে, $\dfrac{1}{\log_b a}$-কে $\log_a m$-এর নিধান a-এর **মডিউলাস** বলে।

টীকা : উপরের অনুসিদ্ধান্তের তথ্যগুলি নিরপেক্ষভাবেও প্রমাণ করা যায়।

যেমন, $\log_b a = x$ এবং $\log_a b = y$ ধরিলে, সংজ্ঞানুসারে, $b^x = a$ এবং $a^y = b$.

$\therefore \quad a = b^x = (a^y)^x = a^{xy}$.

$\therefore \quad xy = 1$; অর্থাৎ $\log_b a \times \log_a b = 1$.

10·4. সাধারণ ও নেপিয়ার লগারিদ্‌ম্ :

শূন্য ব্যতীত যে-কোন বাস্তব ধনাত্মক সংখ্যাকে নিধানরূপে ব্যবহার করা যাইলেও বাস্তবক্ষেত্রে কেবলমাত্র দুইটি রাশি 10 ও e-কে নিধানরূপে ব্যবহার করা হয়।

সেজন্য লগারিদমে দুইটি পদ্ধতি প্রচলিত আছে—সাধারণ পদ্ধতি এবং নেপিয়ার পদ্ধতি।

10-কে নিধান ধরিলে কোন রাশির যে-লগারিদম্ হয়, তাহাকে **সাধারণ লগারিদম্** (Common logarithm) বলে। লিখিবার সুবিধার জন্য সাধারণতঃ নিধান 10-কে উহ্য রাখা হয়। সেজন্য কোন লগারিদমে নিধানের উল্লেখ না থাকিলে বুঝিতে হইবে উহার নিধান হইল 10. Henry Briggs প্রথম এই পদ্ধতির প্রচলন করেন বলিয়া আবিষ্কারকের নামানুসারে ইহাকে ব্রিগ্রিয়ান পদ্ধতিও বলা হয়। যে-কোন পাটীগণিতীয় (numerical) রাশির লগারিদমে এই পদ্ধতি ব্যবহৃত হয় এবং এজন্যই ইহাকে সাধারণ লগারিদম্ বলে। সুতরাং log 2-এর অর্থ হইল $\log_{10} 2$.

e এরূপ একটি রাশির প্রতীক, যাহার মান

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots$$

দ্বাদশ অধ্যায়ে e-সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা হইবে। ইহা একটি অমেয় রাশি এবং 5 দশমিক স্থান পর্যন্ত ইহার আসন্ন মান 2·71828. এই e-কে নিধান ধরিলে কোন রাশির যে লগারিদম্ হয়, তাহাকে **নেপিয়ার লগারিদম্** বলে। John Napier এই পদ্ধতির আবিষ্কারক এবং তাঁহার নামানুসারে এই পদ্ধতির নাম Napierian system. এখানে এই পদ্ধতির আলোচনা করিবার অবকাশ নাই।

10·5. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1· $3\sqrt{2}$ নিধানের সাপেক্ষে 5832-এর লগারিদম্ নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় লগারিদম্ হইল x, অর্থাৎ $\log_{3\sqrt{2}} 5832 = x$.

$\therefore\ (3\sqrt{2})^x = 5832$ অথবা, $(\sqrt{18})^x = (18)^3$.

ইহা হইতে, $(18)^{\frac{x}{2}} = (18)^3$, অর্থাৎ $\frac{1}{2}x = 3$.

$\therefore\ x = 6$ অর্থাৎ নির্ণেয় লগারিদম্ $= 6$.

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $\log_2 \log_2 \log_2 16 = 1$.

বামপক্ষ $= \log_2 \log_2 \log_2 2^4 = \log_2 \log_2 (4 \log_2 2) = \log_2 \log_2 4$

$[\because \log_2 2 = 1]$

$= \log_2 \log_2 2^2 = \log_2 (2 \log_2 2)$

$= \log_2 2 = 1 =$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $7\log\frac{16}{15}+5\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}=\log 2$. [C.P.U]

বামপক্ষ $=7(\log 16-\log 15)+5(\log 25-\log 24)+3(\log 81-\log 80)$
$=7\{\log 2^4-\log(3\times 5)\}+5\{\log 5^2-\log(2^3\times 3)\}+3\{\log 3^4-\log(2^4\times 5)\}$
$=7(4\log 2-\log 3-\log 5)+5(2\log 5-3\log 2-\log 3)+$
$3(4\log 3-4\log 2-\log 5)$
$=28\log 2-7\log 3-7\log 5+10\log 5-15\log 2-5\log 3+$
$12\log 3-12\log 2-3\log 5$

$=\log 2=$ ডানপক্ষ।

বিকল্প পদ্ধতি :

$$\text{বামপক্ষ}=\log\left(\frac{16}{15}\right)^7+\log\left(\frac{25}{24}\right)^5+\log\left(\frac{81}{80}\right)^3=\log\left\{\left(\frac{16}{15}\right)^7\times\left(\frac{25}{24}\right)^5\times\left(\frac{81}{80}\right)^3\right\}$$

$$=\log\left\{\left(\frac{2^4}{3\times 5}\right)^7\times\left(\frac{5^2}{2^3\times 3}\right)^5\times\left(\frac{3^4}{2^4\times 5}\right)^3\right\}$$

$$=\log\frac{2^{28}\times 5^{10}\times 3^{12}}{3^7\times 5^7\times 2^{15}\times 3^5\times 2^{12}\times 5^3}=\log 2=\text{ডানপক্ষ}।$$

উদাহরণ 4. প্রমাণ কর যে, $\log_b a\times\log_c b\times\log_d c=\log_d a$. [B.U.Ent.]

মনে কর, $\log_b a=p$, $\log_c b=q$, $\log_d c=r$ এবং $\log_d a=s$.

$\therefore\ b^p=a$, $c^q=b$, $d^r=c$ এবং $d^s=a$.

$\therefore\ d^s=a=b^p=(c^q)^p=c^{pq}=(d^r)^{pq}=d^{pqr}$.

$\therefore\ pqr=s$; অর্থাৎ $\log_b a\times\log_c b\times\log_d c=\log_d a$.

বিকল্প পদ্ধতি : বামপক্ষ $=\log_c a\times\log_d c$ [$\because\ \log_b a\times\log_c b=\log_c a$]
$=\log_d a=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 5. y^3-নিধানের সাপেক্ষে x^2-এর লগারিদম্, x^3-নিধানের সাপেক্ষে y^2-এর লগারিদমের সমান হইলে, প্রত্যেক লগারিদমের মান নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রত্যেকটি লগারিদম্ $=k$.

$\therefore\ \log_{y^3}x^2=k$ অর্থাৎ $(y^3)^k=x^2$, অর্থাৎ $x^2=y^{3k}$;

$$\therefore\ x=y^{\frac{3}{2}k}\ \cdots(1)$$

এবং $\log_{x^3}y^2=k$, অর্থাৎ $(x^3)^k=y^2$, অর্থাৎ $x^{3k}=y^2$.

$$\therefore\ x=y^{\frac{2}{3k}}\ \cdots(2)$$

(1) ও (2) হইতে, $\frac{3}{2}k=\frac{2}{3k}$ অর্থাৎ $k^2=\frac{4}{9}$. $\therefore\ k=\pm\frac{2}{3}$.

$\therefore$ প্রত্যেকটি লগারিদমের মান $=\pm\frac{2}{3}$.

উদাহরণ 6. $a^{2-x}b^{5x}=a^{x+3}b^{3x}$ হইলে, দেখাও যে, $x\log\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{2}\log a.$

[W.B.B.H.S.]

$$a^{2-x}b^{5x}=a^{x+3}b^{3x}$$

অথবা, $\frac{b^{5x}}{b^{3x}}=\frac{a^{x+3}}{a^{2-x}}$ অর্থাৎ, $b^{2x}=a^{2x+1}$

অথবা, $\left(\frac{b}{a}\right)^{2x}=a.$

$\therefore \log\left(\frac{b}{a}\right)^{2x}=\log a$ অর্থাৎ, $2x\log\left(\frac{b}{a}\right)=\log a.$

$\therefore x\log\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{2}\log a.$

উদাহরণ 7. $\frac{\log x}{b-c}=\frac{\log y}{c-a}=\frac{\log z}{a-b}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^a y^b z^c=1.$

[B. U. Ent.]

মনে কর, $\frac{\log x}{b-c}=\frac{\log y}{c-a}=\frac{\log z}{a-b}=k.$

$\therefore \log x=k\ b-c), \log y=k(c-a), \log z=k(a-b).$

এক্ষণে, $\log(x^a y^b z^c)=\log x^a+\log y^b+\log z^c$

$=a\log x+b\log y+c\log z$

$=k(ab-ac)+k(bc-ab)+k(ac-bc)$

$=0=\log 1.$

$\therefore x^a y^b z^c=1.$

উদাহরণ 8. একটি সংখ্যা-শ্রেণী গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকলে, দেখাও যে, সংখ্যাগুলির লগারিদম্‌গুলি সমান্তর শ্রেণীতে থাকিবে।

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত সংখ্যাগুলি হইল $a, ar, ar^2, \cdots\cdots ar^{n-1}.$ ইহাদের লগারিদম্‌গুলি হইল যথাক্রমে $\log a, \log(ar), \log(ar^2), \cdots\cdots \log(ar^{n-1})$

অর্থাৎ $\log a, (\log a+\log r), (\log a+\log r^2), \cdots\cdots (\log a+\log r^{n-1})$

অর্থাৎ $\log a, (\log a+\log r), (\log a+2\log r), \cdots\cdots \{\log a+(n-1)\log r\}.$

এই শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর $\log r.$ সুতরাং ইহা একটি সমান্তর শ্রেণী।

প্রশ্নমালা X(A)

1. লগারিদম্ নির্ণয় কর :

(i) $\cdot 8$ নিধানের সাপেক্ষে $\cdot 512$-এর ;

(ii) $3\sqrt{2}$ নিধানের সাপেক্ষে 324-এর ;

(iii) $\sqrt[3]{9}$ নিধানের সাপেক্ষে 81-এর ;

(iv) $9\sqrt{3}$ নিধানের সাপেক্ষে $\cdot 1$-এর।

2. কোন্ নিধানের সাপেক্ষে 3125-এর লগারিদম্ 5 ?

3. $2\sqrt{3}$ নিধানের সাপেক্ষে কোন্ সংখ্যার লগারিদম্ 6 ?

4. কোন নিধানের সাপেক্ষে একটি রাশির লগারিদম্ 6. ঐ নিধানের 25 গুণকে নিধান ধরিলে রাশিটির আটগুণ একটি রাশির লগারিদম্ হয় 3. প্রথম নিধানটি নির্ণয় কর। [W.B B.H.S.]

5.(a) $\log_a x+\log_a y=\log_a(x+y)$ হইলে, x-কে y-এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(b) $\log_e m-\log_e n=\log_e(m-n)$ হইলে, m-কে n-এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

6. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{4}<\log_{10}2<\frac{1}{3}$.

7. দেখাও যে, $\log_{10}3$-এর মান $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{2}$-এর মধ্যে অবস্থিত।

8. প্রমাণ কর : $\log(1+2+3)=\log 1+\log 2+\log 3$.

9. প্রমাণ কর যে, (i) $\log_5\log_3\log_3 27=0$.

(ii) $\log_2\log_2\log_4 256=1$.

10. দেখাও যে, (i) $\log\frac{b^n}{c^n}+\log\frac{c^n}{a^n}+\log\frac{a^n}{b^n}=0$.

(ii) $\log\frac{a^2}{bc}+\log\frac{b^2}{ca}+\log\frac{c^2}{ab}=0$.

11. মান নির্ণয় কর :

(i) $\log_2\sqrt{6}+\log_2\sqrt{\frac{2}{3}}$. (ii) $\log_2\sqrt{\frac{1}{2}}+\log_2\sqrt{\frac{2}{3}}+\log_2\sqrt{\frac{3}{4}}$.

(iii) $16\log_{10}\frac{16}{15}+12\log_{10}\frac{25}{24}+7\log_{10}\frac{81}{80}+\log_{10}2$.

(iv) $7\log\frac{15}{16}+6\log\frac{8}{3}+5\log\frac{2}{5}+\log\frac{32}{25}$. [W.B.B.H.S.]

12. সরল কর :

(i) $\log_{10}\frac{384}{5}+\log_{10}\frac{81}{32}+3\log_{10}\frac{5}{3}+\log_{10}\frac{1}{9}$. [W.B.B.H.S.]

(ii) $7\log\frac{10}{9}-2\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}-\log 2$.

13. প্রমাণ কর যে,

(i) $\log\frac{81}{8}-2\log\frac{3}{2}+3\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}=0$. [N.B.U.B. Com.]

(ii) $\log\left(\frac{36}{25}\right)^3+3\log\frac{2}{9}-\log 2=2\log\frac{16}{125}$. [B.U.B.Com.]

(iii) $\log a+\log a^3+\log a^5+\cdots+\log a^{2n-1}=n^2\log a$.

14. দেখাও যে, (i) $\log_b c\times\log_c a\times\log_a b=1$. [B.U.Ent.]

(ii) $\log_a b\times\log_b c\times\log_c d\times\log_d a=1$.

(iii) $\log_b a\times\log_c b\times\log_d c\times\cdots\times\log_a p=\log_a a$.

(iv) $\log_2\sqrt{[2\sqrt{\{2\sqrt{(2\cdots\cdots \text{অসীম পর্যন্ত})}\}}]}=1$.

15. y^2-নিধানের সাপেক্ষে x-এর লগারিদম্, x^2-নিধানের সাপেক্ষে y-এর লগারিদমের সমান হইলে, প্রত্যেকটি লগারিদমের মান নির্ণয় কর।

16. দেখাও যে, $\dfrac{\log 2+\log \frac{3}{5}}{\log \sqrt{27}+\log 8-\log \sqrt{1000}}=\dfrac{2}{3}$.

17.(a) প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x}=1+\log_a b$.

(b) $x=\log_a bc$, $y=\log_b ca$ এবং $z=\log_c ab$ হইলে, দেখাও যে, $(x+1)^{-1}+(y+1)^{-1}+(z+1)^{-1}=1$ এবং $x+y+z=xyz-2$.

18.(a) নিধান একই হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^{\log b}=b^{\log a}$. [C.P.U.]

(b) $\log_a x=y$ হইলে, দেখাও যে, $\log_{a^{-1}} x=-y$.

19. $a^2+b^2=7ab$ হইলে, দেখাও যে, $\log\{\frac{1}{3}(a+b)\}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$ এবং $\log(a-b)=\frac{1}{2}(\log 5+\log a+\log b)$.

20. $a^{3-x}b^{5x}=a^{x+5}b^{3x}$ হইলে, দেখাও যে, $x\log\left(\dfrac{b}{a}\right)=\log a$.

21. $\log(x^2y^3)=9$ এবং $\log\left(\dfrac{x}{y}\right)=2$ হইলে, দেখাও যে,

$\log x=3$ এবং $\log y=1$.

22. প্রমাণ কর যে,

(i) $x^{\log y-\log z}\times y^{\log z-\log x}\times z^{\log x-\log y}=1$.

(ii) $(yz)^{\log y-\log z}\times(zx)^{\log z-\log x}\times(xy)^{\log x-\log y}=1$.

23. (i) $\dfrac{\log x}{y-z}=\dfrac{\log y}{z-x}=\dfrac{\log z}{x-y}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $xyz=1$.

(ii) $\dfrac{x(y+z-x)}{\log x}=\dfrac{y(z+x-y)}{\log y}=\dfrac{z(x+y-z)}{\log z}$ হইলে, দেখাও যে, $y^z z^y=z^x x^z=x^y y^x$.

24. $y=a^{\frac{1}{1-\log_a x}}$ এবং $z=a^{\frac{1}{1-\log_a y}}$ হইলে, দেখাও যে,

$$x=a^{\frac{1}{1-\log_a z}}.$$

25.(a) x, y, z ধনাত্মক এবং গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে, দেখাও যে, $\log_{10}x$, $\log_{10}y$, $\log_{10}z$ সমান্তর শ্রেণীতে এবং $\log_x n$, $\log_y n$, $\log_z n$ বিপরীত শ্রেণীতে আছে। [W.B.B.H.S.]

(b) একটি গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম, q-তম এবং r-তম পদ যথাক্রমে a, b, c হইলে, দেখাও যে, $(q-r)\log a+(r-p)\log b+(p-q)\log c=0$.

10·6. সাধারণ লগারিদ্‌মের পূর্ণক ও অংশক ঃ

সাধারণ লগারিদ্‌মে নিধান 10. $10^x = n$ (n একটি ধনাত্মক রাশি)-সমীকরণের বীজ সাধারণভাবে পূর্ণসংখ্যা নহে। সুতরাং কোন রাশির সাধারণ লগারিদ্‌ম্ যে পূর্ণসংখ্যা হইবেই তাহার কোন নিশ্চয়তা নাই। ইহার কিছু অংশ পূর্ণ এবং কিছু অংশ দশমিক হইতে পারে এই পূর্ণঅংশকে **পূর্ণক** (Characteristic) এবং দশমিকাংশকে **অংশক** (Mantissa) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, $\log 12{\cdot}3 = 1{\cdot}08991$; সুতরাং 12·3-এর লগারিদ্‌মের পূর্ণক 1 এবং অংশক ·08991.

পূর্ণক শূন্য, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইতে পারে, কিন্তু অংশক সর্বদা ধনাত্মক হইবে।

10·7. পূর্ণক নির্ণয়ের নিয়ম ঃ যে-কোন সংখ্যাকে দেখিয়াই উহার লগারিদ্‌মের পূর্ণক কত হইবে বলা যায়। প্রথমে 1 অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যা লওয়া যাউক।

$$10^0 = 1. \qquad \therefore \log 1 = 0.$$
$$10^1 = 10. \qquad \therefore \log 10 = 1.$$
$$10^2 = 100. \qquad \therefore \log 100 = 2.$$
$$10^3 = 1000. \qquad \therefore \log 1000 = 3.$$
$$10^4 = 10000. \qquad \therefore \log 10000 = 4.$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

সুতরাং 1 এবং 10-এর মধ্যবর্তী যে-কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ 0 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, অর্থাৎ, যে-সংখ্যার পূর্ণাংশ এক-অঙ্ক বিশিষ্ট তাহার লগারিদ্‌ম্ $= 0 +$ একটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ ;

অর্থাৎ পূর্ণাংশ এক-অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যার লগারিদ্‌মের পূর্ণক 0.

10 এবং 100-এর মধ্যবর্তী যে-কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ 1 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং 2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, অর্থাৎ যে-সংখ্যার পূর্ণাংশ দুই-অঙ্ক বিশিষ্ট তাহার লগারিদ্‌ম্ $= 1 +$ একটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ ;

অর্থাৎ পূর্ণাংশ দুই-অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার লগারিদ্‌মের পূর্ণক 1.

100 এবং 1000-এর মধ্যবর্তী যে-কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ 2 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং 3 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, অর্থাৎ যে-সংখ্যার পূর্ণাংশ তিন-অঙ্ক-বিশিষ্ট তাহার লগারিদ্‌ম্ $= 2 +$ একটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ ;

অর্থাৎ পূর্ণাংশ তিন-অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যার লগারিদ্‌মের পূর্ণক 2.

অনুরূপভাবে, 1000 এবং 10000-এর মধ্যবর্তী যে-কোন সংখ্যার অর্থাৎ যে-সংখ্যার পূর্ণাংশ চারি-অঙ্ক বিশিষ্ট তাহার লগারিদ্‌মের পূর্ণক 3. সাধারণভাবে, যে-সংখ্যার পূর্ণাংশ n-সংখ্যক অঙ্ক বিশিষ্ট তাহার লগারিদমের পূর্ণক $(n-1)$.

অতএব নিয়মটি হইল,

1 অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যার সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক সর্বদা ধনাত্মক এবং উহা সংখ্যাটির পূর্ণাংশের অঙ্ক-সংখ্যা অপেক্ষা এক কম হইবে।

এক্ষণে, 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক সংখ্যা লওয়া যাউক।

$10^0 = 1.$ $\quad\therefore \log 1 = 0.$

$10^{-1} = \frac{1}{10} = \cdot 1.$ $\quad\therefore \log \cdot 1 = -1.$

$10^{-2} = \frac{1}{100} = \cdot 01.$ $\quad\therefore \log \cdot 01 = -2.$

$10^{-3} = \frac{1}{1000} = \cdot 001.$ $\quad\therefore \log \cdot 001 = -3.$

$10^{-4} = \frac{1}{10000} = \cdot 0001.$ $\quad\therefore \log \cdot 0001 = -4.$

$\ldots \quad \ldots \quad\quad \ldots \quad \ldots$

সুতরাং ·1 এবং 1-এর মধ্যবর্তী যে-কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ (-1) অপেক্ষা বৃহত্তর এবং 0 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, অর্থাৎ পূর্ণাংশবিহীন যে-দশমিকের দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে শূন্য থাকে না, তাহার লগারিদম্$=(-1)+$একটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ, অর্থাৎ তাহার লগারিদমের পূর্ণক (-1).

·01 এবং ·1-এর মধ্যবর্তী যে-কোন সংখ্যার লগারিদম্ (-2) অপেক্ষা বৃহত্তর এবং (-1) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, অর্থাৎ পূর্ণাংশবিহীন যে-দশমিকের দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে একটি শূন্য থাকে, তাহার লগারিদম্$=(-2)+$একটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ, অর্থাৎ তাহার লগারিদমের পূর্ণক (-2).

·001 এবং ·01-এর মধ্যবর্তী যে-কোন সংখ্যার লগারিদম্ (-3) অপেক্ষা বৃহত্তর এবং (-2) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, অর্থাৎ পূর্ণাংশবিহীন যে-দশমিকের দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে দুইটি শূন্য থাকে, তাহার লগারিদম্$=(-3)+$একটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ, অর্থাৎ তাহার লগারিদমের পূর্ণক (-3).

অনুরূপভাবে, ·0001 এবং ·001-এর মধ্যবর্তী যে-কোন সংখ্যার অর্থাৎ পূর্ণাংশ-বিহীন যে-দশমিকের দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে তিনটি শূন্য থাকে, তাহার লগারিদমের পূর্ণক (-4). সাধারণভাবে, পূর্ণাংশবিহীন যে-দশমিকের দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে n-সংখ্যক শূন্য থাকে, তাহার লগারিদমের পূর্ণক $\{-(n+1)\}$.

অতএব নিয়মটি হইল,

1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক সংখ্যার লগারিদ্‌মের পূর্ণক সর্বদা ঋণাত্মক এবং পরমমানে উহা সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে যতগুলি শূন্য থাকিবে তাহা অপেক্ষা এক বেশী হইবে।

পূর্ণক ঋণাত্মক হইলে উহার '−' চিহ্নটিকে মাথায় দিয়া লেখা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, log 25-এর পূর্ণক 1, log 1·972-এর পূর্ণক 0, log ·221-এর পূর্ণক (−1 অথবা $\bar{1}$), log ·00117-এর পূর্ণক (−3 অথবা $\bar{3}$), ইত্যাদি।

10·8. অংশক নির্ণয়ের নিয়ম ঃ

কোন সংখ্যার লগারিদ্‌মের অংশক নির্ণয় করিবার কোন সাধারণ নিয়ম নাই। লগ-তালিকার সাহায্যে অংশক নির্ণয় করিতে হয়।

পুস্তকের শেষ তালিকাটি দেখ। 5 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত কতিপয় সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ দেওয়া আছে। উহার সাহায্যে চারি অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার লগারিদ্‌মের অংশক নির্ণয় করা যায়।

অংশক নির্ণয় করিবার সময় দশমিক বিন্দুর অবস্থান বিবেচনা করিবার কোন প্রয়োজন নাই; কেবলমাত্র যে-অঙ্কগুলি দ্বারা সংখ্যাটি গঠিত সেগুলিই বিবেচ্য বিষয়। প্রদত্ত সংখ্যাটিতে কেবলমাত্র দুইটি অঙ্ক থাকিলে, লগ-তালিকার সর্ববামের স্তম্ভের যে-সারিতে সংখ্যাটি অবস্থিত সেই সারি-বরাবর শূন্য অঙ্কের স্তম্ভে যে-সংখ্যাটি রহিয়াছে তাহার সর্ববামে দশমিক বিন্দু বসাইলে দুই-অঙ্ক-বিশিষ্ট প্রদত্ত সংখ্যাটির লগারিদ্‌মের অংশক পাওয়া যাইবে। প্রদত্ত সংখ্যাটিতে একটি মাত্র অঙ্ক থাকিলে উহার ডানদিকে একটি শূন্য দিয়া দুই অঙ্ক বিশিষ্ট যে-সংখ্যাটি পাওয়া যায়, তাহার লগরিদ্‌মের অংশকই প্রদত্ত সংখ্যাটির লগারিদ্‌মের অংশক হইবে।

প্রদত্ত সংখ্যাটিতে যদি তিনটি অঙ্ক থাকে, তাহা হইলে লগ-তালিকার সর্ববামের স্তম্ভের যে-সারিতে সংখ্যাটির প্রথম দুই সার্থক অঙ্ক অবস্থিত, সেই সারি বরাবর যে-সংখ্যাটি প্রদত্ত সংখ্যার তৃতীয় অঙ্কের স্তম্ভে রহিয়াছে তাহার সর্ববামে দশমিক বিন্দু বসাইলে তিন-অঙ্ক-বিশিষ্ট প্রদত্ত সংখ্যাটির লগারিদ্‌মের অংশক পাওয়া যাইবে।

প্রদত্ত সংখ্যাটিতে চারিটি অঙ্ক থাকিলে, উহার লগারিদ্‌মের অংশক নির্ণয় করিবার জন্য লগ-তালিকার সর্বদক্ষিণে প্রদত্ত গড় অন্তর ব্যবহার করিতে হয়। লগ-তালিকার সর্ববামের স্তম্ভের যে-সারিতে সংখ্যাটির প্রথম দুই সার্থক অঙ্ক অবস্থিত, সেই সারি বরাবর যে-সংখ্যাটি প্রদত্ত সংখ্যার তৃতীয় অঙ্কের স্তম্ভে রহিয়াছে, তাহার সহিত গড় অন্তর তালিকায় ঐ সারি বরাবর যে-সংখ্যাটি প্রদত্ত সংখ্যার চতুর্থ অঙ্কের স্তম্ভে রহিয়াছে তাহা যোগ কর। এই যোগফলের সর্ববামে দশমিক বিন্দু বসাইলে চারি-অঙ্ক-বিশিষ্ট প্রদত্ত সংখ্যাটির লগারিদ্‌মের অংশক পাওয়া যাইবে।

প্রদত্ত সংখ্যাটিতে চারের অধিক অঙ্ক থাকিলে কেবলমাত্র চারিটি অঙ্ক লইয়া উহার লগারিদ্‌মের অংশক নির্ণয় করা হয়।

টীকা : (i) যে-সকল সংখ্যার সার্থক অঙ্কগুলি একই এবং একইক্রমে সাজান, তাহাদের দশমিক বিন্দুগুলির অবস্থান পৃথক হইলেও অংশকগুলি একই।

উদাহরণস্বরূপ, $\log 2{\cdot}34 = 0{\cdot}36922$,

$\log 23{\cdot}4 = \log(2{\cdot}34 \times 10) = \log 2{\cdot}34 + \log 10 = {\cdot}36922 + 1 = 1{\cdot}36922$,

$\log 2340 = \log(2{\cdot}34 \times 1000) = \log 2{\cdot}34 + \log 10^3 = {\cdot}36922 + 3 = 3{\cdot}36922$;

অর্থাৎ কোন সংখ্যার অংশক যত, সংখ্যাটিকে 10-এর কোন পূর্ণ ঘাত দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলেও প্রাপ্ত সংখ্যাটির একই অংশক হইবে।

(ii) প্রদত্ত সংখ্যাটিতে পাঁচটি অঙ্ক থাকিলে লগ-তালিকা হইতে প্রথম চারিটি অঙ্ক লইয়া তাহার এবং তাহার পরের সংখ্যাটির লগারিদ্‌মের অংশক নির্ণয় করা হয়। তারপর ঐকিক নিয়মের সাহায্যে অনেক সময় প্রদত্ত সংখ্যাটির পঞ্চম অঙ্কটির জন্য অংশক নির্ণয় করা হয়। ইহা একটি উদাহরণের মাধ্যমে আলোচিত হইল।

$\log 2345{\cdot}6$ নির্ণয় করিতে হইলে, লগ-তালিকা হইতে আমরা লিখি

$\log 2345 = 3{\cdot}37015$ এবং $\log 2346 = 3{\cdot}37033$.

ইহা হইতে বলা যায়, সংখ্যাটির 1 বৃদ্ধিতে লগারিদ্‌মে ${\cdot}00018$ বৃদ্ধি হয়

$\therefore$ ... ${\cdot}6$ ... ... ${\cdot}00018 \times {\cdot}6 = {\cdot}00011$ (প্রায়) বৃদ্ধি হয়।

$\therefore \quad \log 2345{\cdot}6 = 3{\cdot}37015 + {\cdot}00011 = 3{\cdot}37026$.

10·9. অ্যান্টি-লগারিদ্‌ম্ :

কোন সংখ্যা N-এর লগারিদ্‌ম্ যদি m হয়, তাহা হইলে N-কে m-এর **অ্যান্টি-লগারিদ্‌ম্** (anti-logarithm) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, $\log 2 = {\cdot}30103$ বলিয়া, ${\cdot}30103$-এর অ্যান্টি-লগারিদ্‌ম্ হইল 2.

কোন সংখ্যার অ্যান্টি-লগারিদ্‌ম্ নির্ণয় করিতে হইলে, অ্যান্টি-লগারিদ্‌মের তালিকা হইতে লগারিদ্‌ম্ তালিকানুযায়ী সংখ্যাটির দশমিক অংশের অ্যান্টি-লগারিদ্‌ম্ দেখিয়া সংখ্যাটির পূর্ণাংশের অঙ্ক অনুযায়ী দশমিক বিন্দু বসাইতে হয়।

10·10. উদাহরণাবলী :

উদাহরণ 1. $\log 2 = 0{\cdot}3010300$, $\log 3 = 0{\cdot}4771213$ এবং $\log 7 = 0{\cdot}8450980$ হইলে, (i) $\log 84$, (ii) $\log 105$ এবং (iii) $\log {\cdot}294$-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. B. Com.]

(i) $\log 84=\log(2^2\times 3\times 7)=2\log 2+\log 3+\log 7$
$=2\times{\cdot}3010300+{\cdot}4771213+{\cdot}8450980$
$={\cdot}6020600+{\cdot}4771213+{\cdot}8450980=1{\cdot}9242793.$

(ii) $\log 105=\log(3\times 7\times\frac{10}{2})=\log 3+\log 7+\log 10-\log 2$
$={\cdot}4771213+{\cdot}8450980+1-{\cdot}3010300$
$=2{\cdot}3222193-{\cdot}3010300=2{\cdot}0211893.$

(iii) $\log{\cdot}294=\log\frac{294}{1000}=\log 294-\log 10^3$
$=\log(2\times 3\times 7^2)-3\log 10$
$=\log 2+\log 3+2\log 7-3$
$={\cdot}3010300+{\cdot}4771213+2\times{\cdot}8450980-3$
$=-3+{\cdot}7781513+1{\cdot}6901960=-3+2{\cdot}4683473$
$=-1+{\cdot}4683473=\bar{1}{\cdot}4683473.$

উদাহরণ 2. $\log 2={\cdot}30103$ হইলে, 2^{64}-এর তুল্যমান সংখ্যাটির অঙ্কসংখ্যা নির্ণয় কর [W. B. B. H. S.]

$\log 2^{64}=64\log 2=64\times{\cdot}30103=19{\cdot}26592.$

সুতরাং 2^{64}-এর তুল্যমান সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 19.

∴ 2^{64}-এর তুল্যমান সংখ্যাটির অঙ্কসংখ্যা $=19+1=20.$

উদাহরণ 3. 3^{-20}-এর তুল্যমান দশমিকটির প্রথম সার্থক অঙ্কটির অবস্থান নির্ণয় কর।

$\log 3^{-20}=-20\log 3=-20\times{\cdot}47712=-9{\cdot}5424=-9-{\cdot}5424$
$=-9-1+(1-{\cdot}5424)=-10+{\cdot}4576=\overline{10}{\cdot}4576.$

সুতরাং 3^{-20}-এর তুল্যমান দশমিকটির লগের পূর্ণক -10.

∴ 3^{-20}-এর তুল্যমান দশমিকটিতে দশমিক বিন্দুর পর $(10-1)$ টি অথবা 9টি শূন্য আছে।

∴ প্রথম সার্থক অঙ্কটি দশম অঙ্ক।

উদাহরণ 4. $\log 2={\cdot}30103$, $\log 3={\cdot}47712$ এবং $\log 7={\cdot}84509$ হইলে দেখাও যে, $(\frac{21}{20})^{100}$, 100 অপেক্ষা বৃহত্তর।

$\log(\frac{21}{20})^{100}=100\log(\frac{3\times 7}{2\times 10})=100\,[\log 3+\log 7-\log 2-\log 10]$
$=100\,[{\cdot}47712+{\cdot}84509-{\cdot}30103-1]$
$=100\,[1{\cdot}32221-1{\cdot}30103]=100\times{\cdot}02118=2{\cdot}118.$

সুতরাং $(\frac{21}{20})^{100}$-এর তুল্যমান সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 2 এবং অংশক ·118 (শূন্য অপেক্ষা বৃহত্তর)।

$\therefore$ $(\frac{21}{20})^{100}$-এর তুল্যমান সংখ্যাটির অঙ্ক-সংখ্যা $=2+1=3$ এবং $(\frac{21}{20})^{100}$-এর তুল্যমান সংখ্যাটি তিন অঙ্কের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা 100 অপেক্ষা বৃহত্তর।

উদাহরণ 5. $\log 3868=3·58749$ এবং $\log 3869=3·58761$ হইলে, $\log 38·686$-এর মান কত?

কোন্ সংখ্যার লগারিদম্ 2·58755?

এখানে, $\log 3868=3·58749$ এবং $\log 3869=3·58761$.

সুতরাং সংখ্যাটিতে 1 বৃদ্ধি পাইলে লগারিদমে ·00012 বৃদ্ধি পায়

$\therefore$ ... ... ·6 ... ...·6 × ·00012 বা ·00007 (প্রায়) বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ $\log 38·686$-এর অংশক $= ·58749+·00007=·58756$

এবং ইহার পূর্ণক $=2-1=1$.

$\therefore$ $\log 38·686=1·58756$

পুনরায়, 3·58755 রাশিটি 3·58749 ও 3·58761-এর মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং যে-সংখ্যার লগারিদম্ 3·58755, সেই সংখ্যাটি 3868 ও 3869-এর মধ্যে অবস্থিত। $3·58755-3·58749=·00006$.

এক্ষণে, লগারিদমে ·00012 বৃদ্ধিতে সংখ্যাটিতে 1 বৃদ্ধি পায়

$\therefore$ ... ... ·00006... ... $\frac{1}{·00012}\times·00006$ বা ·5 বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ $3·58755=\log 3868·5$.

$\therefore$ $2·58755=\log 386·85$.

যেহেতু অংশকদ্বয় সমান, সুতরাং সংখ্যাদ্বয়ের অঙ্কদ্বয় একই এবং একই ক্রমে সাজান এবং পূর্ণক 2 বলিয়া সংখ্যাটির তিনটি অঙ্কের পর দশমিক বসিবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=386·85$.

উদাহরণ 6. লগ-তালিকার সাহায্যে 10-এর নবম মূল নির্ণয় কর।

মনে কর, $x=(10)^{\frac{1}{9}}$. [C.U.B. Com.]

$\therefore$ $\log x=\log (10)^{\frac{1}{9}}=\frac{1}{9}\log 10=·11111$.

$\therefore$ $x=$ anti-log $·11111=1·2915$, (এ্যান্টি-লগের তালিকা হইতে)।

সুতরাং $\sqrt[9]{10}=1·2915$.

উদাহরণ 7. লগ-তালিকার সাহায্যে $\frac{\sqrt[3]{48\cdot7}\times(\cdot00321)^{\frac{1}{2}}}{0\cdot372}$-এর মান নির্ণয় কর। [C.P.U.]

মনে কর, $x=\frac{(48\cdot7)^{\frac{1}{3}}\times(\cdot00321)^{\frac{1}{2}}}{\cdot372}$.

$\therefore \log x=\log\frac{(48\cdot7)^{\frac{1}{3}}\times(\cdot00321)^{\frac{1}{2}}}{\cdot372}=\frac{1}{3}\log 48\cdot7+\frac{1}{2}\log\ \cdot00321-\log\cdot372$

$=\frac{1}{3}\times1\cdot68753+\frac{1}{2}\times\bar{3}\cdot50650-\bar{1}\cdot57054$
$=\cdot56251+\frac{1}{2}(-3+\cdot50650)-(-1+\cdot57054)$
$=\cdot56251-1\cdot5+\cdot25325+1-\cdot57054$
$=1\cdot81576-2\cdot07054=-1+2\cdot81576-2\cdot07054=\bar{1}\cdot74522.$

$\therefore\quad x=\text{anti-log }\bar{1}\cdot74522=\cdot55619.$

উদাহরণ 8. $3^x.7^{2x+1}=11^{x+5}$ সমীকরণটিকে সমাধান করিয়া দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত x-এর মান নির্ণয় কর।

$3^x.7^{2x+1}=11^{x+5}.$

উভয়পক্ষের লগারিদম্ লইলে,

$x\log 3+(2x+1)\log 7=(x+5)\log 11$

অথবা, $x(\log 3+2\log 7-\log 11)=5\log 11-\log 7$

অথবা, $x=\frac{5\log 11-\log 7}{\log 3+2\log 7-\log 11}=\frac{5\times1\cdot04139-0\cdot84510}{\cdot47712+2\times\cdot84510-1\cdot04139}$

$=\frac{4\cdot36185}{1\cdot12593}=3\cdot87.$

প্রশ্নমালা X(6)

1. $\log 2=0\cdot3010300$, $\log 3=0\cdot4771213$ এবং $\log 7=0\cdot8450980$ হইলে, মান নির্ণয় কর :

(i) $\log 12$. (ii) $\log 45$. (iii) $\log 75$. (iv) $\log 5\frac{1}{16}$.

(v) $\log\ \cdot1875$. (vi) $\log\ \cdot015$. (vii) $\log\ \cdot0054$. (viii) $\log(\cdot405)^{\frac{1}{5}}$.

(ix) $\log\left\{\frac{(7\cdot2)^3\times(\cdot016)^4}{(1\frac{1}{5})^{15}}\right\}$. (x) $\log\left\{\frac{(10\cdot8)^{\frac{1}{2}}\times(\cdot24)^{\frac{5}{8}}}{(90)^{-2}}\right\}$.

2. তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর :

(i) $\log_3 54$. (ii) $\log_{\sqrt{8}} 81$.

3. নিম্নের রাশিগুলির লগারিদমের পূর্ণক নির্ণয় কর :

(i) 2·9. (ii) 117·68. (iii) 0·4352. (iv) 0·07. (v) ·00101.

4. নিম্নের রাশিগুলির লগারিদম্ নির্ণয় কর :

(i) 5. (ii) 19. (iii) 149. (iv) 3867·2.

(v) ·234. (vi) ·0102 (vii) ·00819. (viii) 0·0000023.

5. নিম্নের রাশিগুলির এ্যান্টি-লগারিদম্ (anti-log) নির্ণয় কর :

(i) ·0106 (ii) ·1968. (iii) 2·3456. (iv) 4·8463.

(v) $\bar{1}$·365. (vi) $\bar{2}$·468. (vii) −·3869. (viii) −2·7080.

6. $\log 2 = \cdot3010$ এবং $\log 3 = \cdot4771$ হইলে, (i) 3^{12}-এর এবং (ii) $(12)^{12}$-এর তুল্যমান সংখ্যার অঙ্ক-সংখ্যা নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

7. 2^{-10}-এর তুল্যমান রাশিটির দশমিক বিন্দুর এবং প্রথম সার্থক অঙ্কটির মাঝে কতগুলি শূন্য আছে ?

8. 3^{-16}-এর তুল্যমান দশমিকটির প্রথম সার্থক অঙ্কটির অবস্থান নির্ণয় কর।

9. $\log 2 = \cdot30103$, $\log 3 = \cdot47712$ এবং $\log 7 = \cdot84509$ হইলে, দেখাও যে, $(\frac{28}{27})^{150}$, 100 অপেক্ষা বৃহত্তর।

10. $\log 63374 = 4\cdot8019111$ এবং $\log 63375 = 4\cdot8019180$ হইলে, $\log 633\cdot743$-এর মান কত ? কোন্ সংখ্যার লগারিদম্ $\bar{1}\cdot8019136$?

11. $\log 37\cdot203 = 1\cdot5705780$ এবং $\log 1915631 = 6\cdot2823120$ হইলে, 372·03, 37·203, 3·7203 এবং ·0037203-এর গুণফল নির্ণয় কর। [C. P. U.]

12. $\log_{10} 165 = 2\cdot2175$ এবং $\log_{10} 6974 = 3\cdot8435$ হইলে, $\sqrt[5]{\cdot00000165}$-এর মান নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

13. $\log_{10} 2 = \cdot3010$ এবং $\log_{10} e = \cdot4343$ হইলে, $y = ke^{-0\cdot038t}$ সূত্র হইতে, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত 't'-এর মান নির্ণয় কর, যখন $y = \frac{1}{2}k$.

14. 789·45-এর অষ্টম মূল নির্ণয় কর। [C.U.B. Com.]

15. 1129-এর অষ্টাদশ মূল নির্ণয় কর। [C. U. B. Com.]

16. লগ-তালিকার সাহায্যে আসন্ন দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত

$2\cdot41 \times (1\cdot24)^{\frac{1}{2}} \div (0\cdot78)^{\frac{1}{2}}$-এর মান নির্ণয় কর। [C.P.U.]

17. $\log 2 = \cdot 3010300$, $\log 3 = \cdot 4771213$ এবং $\log 259569 = 5\cdot 4142524$ (আসন্ন সাত দশমিক স্থান পর্যন্ত) হইলে, $\left\{\dfrac{(\cdot 32)^8 \times (625)^4}{(\cdot 00432)^2 \times (\cdot 3125)^3 \times 25}\right\}^{\frac{1}{5}}$ -এর মান নির্ণয় কর। [W.B.B.H.S.]

18. মান নির্ণয় কর :

(i) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{36\cdot 21}}$. (ii) $\dfrac{5\cdot 631 \times 42\cdot 13 \times \cdot 2783}{2\cdot 451 \times \cdot 8392 \times 12\cdot 61}$.

(iii) $\sqrt[3]{\left\{\dfrac{294 \times 125}{42 \times 32}\right\}^2}$. (iv) $\sqrt[7]{\left\{\dfrac{294 \times 425}{142 \times 324}\right\}^2}$.

19. লগ-তালিকার সাহায্যে, দেখাও যে,

$$750\{1-(1\cdot 065)^{-12}\} = 397\cdot 5 \text{ (প্রায়)}।$$

20. $\log 101 = 2\cdot 0043214$ এবং $\log 111\cdot 5675 = 2\cdot 0475354$ হইলে, $\dfrac{101}{100} + \left(\dfrac{101}{100}\right)^2 + \left(\dfrac{101}{100}\right)^3 + \cdots\cdots$ দশম পদ পর্যন্ত শ্রেণীটির মান নির্ণয় কর।

21. $\log 2 = \cdot 30103$, $\log 3 = \cdot 47712$, $\log 5 = \cdot 69897$ এবং $\log 7 = \cdot 84510$ ধরিয়া সমাধান কর :

(i) $2^x . 3^{2x} = 100$.

(ii) $5^{5-3x} = 2^{x+2}$. [W.B.B.H.S.]

(iii) $6^{3-4x} . 4^{\ +5} = 8$. (iv) $7^{3x+2} + 4^{x+2} = 7^{3x+1} + 2^{2x+6}$.

22. log 2, log 3 ইত্যাদির মান ব্যবহার করিয়া সমাধান কর :

(i) $2^x = 3^y$, $2^{y+1} = 3^{x-1}$.

(ii) $2^x 7^y = 80000$, $3^y = 500$.

23. কোন শহরে লোকসংখ্যা বর্তমানে 10000. প্রতি বৎসর 10% হারে বৃদ্ধি পাইলে, তিন বৎসর পরে লোকসংখ্যা কত হইবে ?

24. যে-কোন বৎসরের প্রথমে যে-লোকসংখ্যা থাকে সেই বৎসরে তাহার $\frac{3}{40}$ অংশ জন্মে এবং $\frac{1}{40}$ অংশ মরে। দেখাও যে, $55\frac{458}{539}$ বৎসরে লোকসংখ্যা দ্বিগুণ হইবে। ($\log 2 = \cdot 30103$ এবং $\log 3 = \cdot 47712$).

25. এক খুচরা বিক্রেতার 60 কিলোগ্রাম উচ্চমানের চিনি ছিল। 20 কিলোগ্রাম চিনি বিক্রয় হওয়া মাত্র অবশিষ্ট চিনির সহিত সে নিম্নমানের সমপরিমাণ চিনি মিশ্রিত করে। এইরূপ প্রক্রিয়া কতবার করিবার পর সমুদয় চিনির $\frac{32}{243}$ অংশ উচ্চমানের চিনি হইবে ?

একাদশ অধ্যায়

চক্রবৃদ্ধি ও বার্ষিকী

(Compound Interest and Annuities)

A. চক্রবৃদ্ধি

11·1. সংজ্ঞা ঃ দৈনন্দিন কর্মজীবনে অভাবের তাগিদে বা কোন প্রয়োজনে অনেক সময় এক ব্যক্তি অন্য ব্যক্তির নিকট (বা কোন সংস্থা হইতে) টাকা ধার বা দেনা করে এবং নির্দিষ্ট সময় পরে উহা পরিশোধ করে। যে-ব্যক্তি টাকা ধার করে তাহাকে **অধমর্ণ** বা **দেনাদার** (debetor) এবং যে-ব্যক্তির নিকট টাকা ধার করে তাহাকে **উত্তমর্ণ** বা **পাওনাদার** (creditor) বলে। যে-টাকা ধার দেওয়া হয় তাহাকে **আসল** বা **মূলধন** (Principal sum বা capital) বলে। নির্দিষ্ট সময় পরে অধমর্ণ যখন দেনা পরিশোধ করে তখন উত্তমর্ণকে তাহার টাকা ব্যবহার করার জন্য পূর্বচুক্তি অনুযায়ী ঐ আসল টাকা ছাড়াও কিছু অতিরিক্ত টাকা দেয়। ঐ অতিরিক্ত টাকাকে **সুদ** বা **কুসীদ** (interest) বলে। আসলের উপর কোন নির্দিষ্ট সময়ের জন্য যে-হারে সুদ ধরা হয়, তাহাকে **সুদের হার** (rate) বলে। প্রতি 100 টাকায় প্রতি বৎসর যে-সুদ দেওয়া হয়, তাহাকে সুদের **বার্ষিক শতকরা হার** বলে। যে-সময় অন্তে সুদ প্রাপ্য হয়, তাহাকে **সুদের পর্ব** বলে। সুদের পর্ব এক বৎসর, ছয়মাস, তিনমাস, ইত্যাদি হইতে পারে অর্থাৎ সুদ বার্ষিক, ষান্মাষিক, ত্রৈমাসিক, ইত্যাদি ভিত্তিতে দেয় হইতে পারে। কোনরূপ উল্লেখ না থাকিলে, সুদের শতকরা হার বলিলে বার্ষিক শতকরা হার এবং সুদ বার্ষিক ভিত্তিতে দেয় বলিয়া ধরা হয়।

কোন নির্দিষ্ট সময় অন্তে আসল ও সুদের সমষ্টিকে **সুদ-আসল** বা **সবৃদ্ধিমূল** বা **সুদ-মূল** (amount) বলে।

সুদ দুই প্রকার ঃ **সরল সুদ** এবং **চক্রবৃদ্ধি**। কেবলমাত্র মূলধন বা আসলের উপরই বরাবর সুদ ধরা হইলে, সেই সুদকে **সরল সুদ** (simple interest) বলে। কোন নির্দিষ্ট সময়অন্তে দেয় সুদ আসলের সহিত যোগ করা হইলে এবং এই সবৃদ্ধিমূলকে পরবর্তী নির্দিষ্ট সময়ের জন্য নূতন আসলরূপে গণ্য করিয়া সুদ ধরা হইলে, সেই সুদকে **চক্রবৃদ্ধি** বা **মিশ্রসুদ** (compound interest) বলে। সুতরাং কোন মূলধনের সরলসুদ অপেক্ষা চক্রবৃদ্ধি অধিক হইবে।

চক্রবৃদ্ধি ও মূলধনের সমষ্টিকে **সমূল চক্রবৃদ্ধি** বলে।

নির্দিষ্ট সময় অন্তে প্রাপ্য একটি নির্দিষ্ট টাকার **বর্তমান মূল্য** (Present value) হইবে সেই টাকা, যাহা ঐ সময়ের স্থদ সহ একত্রে নির্দিষ্ট প্রাপ্যটাকার সমান হইবে। স্থতরাং বর্তমান মূল্যের সহিত উহার স্থদ যোগ করিলেই নির্দিষ্ট সময় অন্তে প্রাপ্য টাকার পরিমাণ পাওয়া যাইবে অর্থাৎ বর্তমান মূল্যের সবৃদ্ধি-মূল, নির্দিষ্ট সময় অন্তে প্রাপ্য টাকার সমান হইবে।

নির্দিষ্ট প্রাপ্য টাকার বর্তমান মূল্যের নির্দিষ্ট সময় অন্তে যে-স্থদ হয়, তাহাকে **বাটা** (True Discount) বলে। স্থতরাং, বাটা, প্রাপ্য টাকা ও তাহার বর্তমান মূল্যের অন্তরফল।

1·12. স্থদের সূত্র সমূহ ঃ

(a) সরল স্থদের সূত্র ঃ

আসল$=P$, হার$=r\%$, সময়$=n$ বৎসর, সরল স্থদ$=I$ এবং সবৃদ্ধিমূল$=A$

হইলে, $$I=\frac{r\times P\times n}{100}=\frac{nrP}{100}$$

এবং $$A=P+I=P+\frac{nrP}{100}=P\left(1+\frac{r}{100}n\right).$$

স্থতরাং সরল স্থদের ক্ষেত্রে, সবৃদ্ধিমূল সমান্তর প্রগতিতে বৃদ্ধি পায়।

(b) চক্রবৃদ্ধির সূত্র ঃ

(i) বার্ষিক ভিত্তিতে স্থদ দেয়

মনে কর, আসল$=P$, হার$=r\%$, সময়$=n$ বৎসর এবং সমূল চক্রবৃদ্ধি$=A$.

প্রথম বৎসরের স্থদ$=P\frac{r}{100}$. [$\because$ 100 টাকার 1 বৎসরের স্থদ r টাকা]

$\therefore$ প্রথম বৎসরের সবৃদ্ধিমূল$=P+\frac{Pr}{100}=P\left(1+\frac{r}{100}\right)=$ দ্বিতীয় বৎসরের আসল।

দ্বিতীয় বৎসরের স্থদ$=P\left(1+\frac{r}{100}\right)$-এর স্থদ$=P\left(1+\frac{r}{100}\right)\frac{r}{100}$.

$\therefore$ দ্বিতীয় বৎসরের সবৃদ্ধিমূল$=P\left(1+\frac{r}{100}\right)+P\left(1+\frac{r}{100}\right)\frac{r}{100}$

$$=P\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$=$ তৃতীয় বৎসরের আসল।

তৃতীয় বৎসরের সুদ $=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\frac{r}{100}$.

তৃতীয় বৎসরের সবৃদ্ধিমূল $=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2+P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\frac{r}{100}$

$$=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

$$=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^3 = \text{চতুর্থ বৎসরের আসল।}$$

এইভাবে অগ্রসর হইলে, $A=n$- বৎসর অন্তে সবৃদ্ধিমূল $=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$.

1 একক মূলধনের 1 বৎসরের সুদ i হইলে, অর্থাৎ $\frac{r}{100}=i$ হইলে, সূত্রটি হয়

$$A=P(1+i)^n.$$

সুতরাং চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে, সবৃদ্ধিমূল বা সমূলচক্রবৃদ্ধি গুণোত্তর প্রগতিতে বৃদ্ধি পায়।

(ii) **বৎসরের কোন আংশিক ভিত্তিতে সুদ দেয়**

মনে কর, আসল $=P$, হার $=r\%$, সময় $=n$ বৎসর, সমূল চক্রবৃদ্ধি $=A$ এবং বৎসরে m-বার সুদ দেওয়া হয়, অর্থাৎ $\frac{1}{m}$-বৎসর পরপর সুদ দেওয়া হয়।

প্রথম পর্বের সুদ $=P.\frac{r}{100}.\frac{1}{m}=\frac{Pr}{100m}$.

$\therefore$ প্রথম পর্বের সবৃদ্ধিমূল $=P+\frac{Pr}{100m}=P\left(1+\frac{r}{100m}\right)$.

বৎসরে m-বার সুদ দেওয়া হয়,

সুতরাং প্রথম বৎসরের সবৃদ্ধিমূল $=P\left(1+\frac{r}{100m}\right)^m$.

$\therefore$ $A=n$-বৎসর অন্তে সবৃদ্ধিমূল বা সমূলচক্রবৃদ্ধি $=P\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{mn}$.

অতএব সুদ ষান্মাষিক, ত্রৈমাসিক এবং মাসিক ভিত্তিতে দেয় হইলে, n-বৎসর অন্তে সমূলচক্রবৃদ্ধি হইবে যথাক্রমে

$$P\left(1+\frac{r}{200}\right)^{2n},\ P\left(1+\frac{r}{400}\right)^{4n} \text{ এবং } P\left(1+\frac{r}{1200}\right)^{12n}.$$

টীকা: সাধারণ পাটীগণিতের নিয়মে (অর্থাৎ ঐকিক নিয়মের সাহায্যে) প্রতি বৎসরের (অর্থাৎ প্রতি পর্বের) সরল সুদ নির্ণয় করিয়া, সেই সুদ আসলের সহিত যোগ করিলে, নতুন আসল

পাওয়া যায়। আবার, এই নতুন আসলের উপর সুদ নির্ণয় করিয়া উহার সহিত যোগ করিলে পরবর্তী পর্বের আসল পাওয়া যাইবে। এইভাবে অগ্রসর হইয়াও চক্রবৃদ্ধির প্রশ্নের সমাধান করা যায়। কিন্তু ইহা খুব সহজসাধ্য নয়। সেই কারণে সূত্রের সাহায্যে লগারিদম্ প্রয়োগ করিয়া চক্রবৃদ্ধির প্রশ্নের সমাধান করা হয়।

চক্রবৃদ্ধির সঙ্গে সমহারে বৃদ্ধি বা ক্ষয়ের প্রকৃতিগত মিল আছে; এরূপ সমুদয় ক্ষেত্রেই চক্রবৃদ্ধি হারের সূত্রটি, অর্থাৎ $A=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ প্রয়োগ করা যায়। ক্ষয়ের ক্ষেত্রে সূত্রটি হইবে

$$A=P\left(1-\frac{r}{100}\right)^n.$$

11·3. বর্তমান মূল্য এবং বাটা :

$r\%$ হারে n-বৎসর পরে যাহার পরিমাণ A হইবে, মনে কর, তাহার বর্তমান মূল্য P.

$\therefore$ সরল সুদের ক্ষেত্রে, $A=P\left(1+\frac{r}{100}n\right)$; অর্থাৎ $P=\dfrac{A}{1+\frac{r}{100}n}$

এবং বাটা $=A-P=A-\dfrac{A}{1+\frac{r}{100}n}=\dfrac{Arn}{100+rn}$.

চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে, $A=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ (বার্ষিক ভিত্তিতে সুদ দেয় ধরিয়া)

$$\therefore \quad P=\frac{A}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$$

এবং বাটা $=A-P=A-\dfrac{A}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}=\dfrac{A\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-1\right\}}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$.

11·4. উদাহরণাবলী :

উদাহরণ 1. বার্ষিক 5% হারে 100 টাকার 20 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর (সুদ বৎসর অন্তে দেয়)। [C.U.B. Com.]

এখানে, আসল $=P=100$ টাকা, সময় $=n=20$ বৎসর এবং
সুদের হার $=r\%=5\%$.

মনে কর, নির্ণেয় সমূল চক্রবৃদ্ধি $=A$ টাকা।

$$\therefore \quad A=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n=100\left(1+\frac{5}{100}\right)^{20}=100\times\left(\frac{21}{20}\right)^{20}.$$

$\therefore \quad \log A = \log 100 + 20(\log 21 - \log 20)$

$= 2 + 20(1{\cdot}32222 - 1{\cdot}30103) = 2{\cdot}4238.$

$\therefore \quad A = \text{Anti-log } 2{\cdot}4238 = 265{\cdot}34.$

সুতরাং নির্ণেয় সমূলচক্রবৃদ্ধি $= 265{\cdot}34$ টাকা (প্রায়)।

উদাহরণ 2. সুদ 6 মাস অন্তর দেয় হইলে, বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি হারে 6000 টাকার 4 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

এখানে, আসল $= P = 6000$ টাকা, সময় $= n = 4$ বৎসর, সুদের হার $= r\% = 6\%$ এবং সুদ ষান্মাষিক ভিত্তিতে দেয়।

মনে কর, 4-বৎসর অন্তে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= A$ টাকা।

$$\therefore \quad A = P\left(1 + \frac{r}{200}\right)^{2n} = 6000\left(1 + \frac{6}{200}\right)^{8} = 6000 \times \left(\frac{103}{100}\right)^{8}.$$

$\therefore \quad \log A = \log 6000 + 8(\log 103 - \log 100)$

$= 3{\cdot}77815 + 8(2{\cdot}01284 - 2) = 3{\cdot}88087.$

$\therefore \quad A = \text{Anti-log } 3{\cdot}88087 = 7601{\cdot}2.$

সুতরাং সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 7601{\cdot}2$ টাকা (প্রায়)।

অতএব নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি $= (7601{\cdot}2 - 6000)$ টাকা (প্রায়) $= 1601{\cdot}2$ টাকা।

উদাহরণ 3. বার্ষিক $5\frac{1}{2}\%$ চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত টাকা 15 বৎসরে সুদে-আসলে 5000 টাকা হইবে ? এস্থলে, সুদ বৎসর অন্তে দেয় বলিয়া ধরিতে হইবে।

[B. U. B. Com.]

এখানে, সমূল চক্রবৃদ্ধি $= A = 5000$ টাকা, সময় $= n = 15$ বৎসর এবং সুদের হার $= r = 5\frac{1}{2}\%$, মনে কর, নির্ণেয় আসল $= P$ টাকা।

$$\therefore \quad A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n} \text{ অর্থাৎ } 5000 = P\left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right)^{15} = P \times (1{\cdot}055)^{15}.$$

$\therefore \quad \log 5000 = \log P + 15 \log 1{\cdot}055$

অথবা, $\log P = 3{\cdot}69897 - 15({\cdot}02321) = 3{\cdot}35082.$

$\therefore \quad P = \text{Anti-log } 3{\cdot}35082 = 2243$ (প্রায়)।

সুতরাং নির্ণেয় আসল $= 2243$ টাকা (প্রায়)।

টীকা : উল্লিখিত প্রশ্নটি নিম্নরূপেও করা যায় :

বার্ষিক $5\frac{1}{2}\%$ চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 15 বৎসর পরে দেয় 5000 টাকার বর্তমান মূল্য কত ?

উদাহরণ 4. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত সময়ে সবৃদ্ধিমূল আসলের দ্বিগুণ হইবে ?

এখানে, সুদের হার $= r\% = 5\%$.

মনে কর, আসল $= P$ টাকা এবং নির্ণেয় সময় $= n$ বৎসর।

$\therefore$ সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 2P$ টাকা।

$\therefore \quad 2P = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$, অর্থাৎ $2 = \left(1+\frac{5}{100}\right)^n = (1{\cdot}05)^n$.

$\therefore \quad \log 2 = n \log 1{\cdot}05$

অথবা, $n = \frac{\log 2}{\log 1{\cdot}05} = \frac{{\cdot}30103}{{\cdot}02119} = 14{\cdot}2$ (প্রায়)।

সুতরাং নির্ণেয় সময় $= 14{\cdot}2$ বৎসর (প্রায়)।

উদাহরণ 5. সুদ 3 মাস অন্তর দেয় হইলে, বার্ষিক শতকরা কত সুদে 800 টাকার 20 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি 9,200 টাকা হইবে ?

এখানে, আসল $= P = 800$ টাকা, সময় $= n = 20$ বৎসর,
সমূল চক্রবৃদ্ধি $= (800 + 9{,}200)$ টাকা $= 10{,}000$ টাকা এবং সুদ 3 মাস অন্তর দেয়।

মনে কর, নির্ণেয় সুদের হার $= r\%$.

$\therefore \quad A = P\left(1+\frac{r}{400}\right)^{4n}$, অর্থাৎ $10{,}000 = 800\left(1+\frac{r}{400}\right)^{80}$

অথবা $\left(1+\frac{r}{400}\right)^{80} = \frac{25}{2} = 12{\cdot}5.$

$\therefore \quad 80 \log\left(1+\frac{r}{400}\right) = \log 12{\cdot}5 = 1{\cdot}09691$

অথবা, $\log\left(1+\frac{r}{400}\right) = \frac{1{\cdot}09691}{80} = {\cdot}013711.$

$\therefore \quad 1+\frac{r}{400} = \text{Anti-log } {\cdot}013711 = 1{\cdot}0321$ (প্রায়)

অথবা, $\frac{r}{400} = {\cdot}0321$ (প্রায়) অর্থাৎ $r = 12{\cdot}84$ (প্রায়)।

সুতরাং নির্ণেয় সুদের হার $= 12{\cdot}84\%$ (প্রায়)।

উদাহরণ 6. সি. পি. মুখার্জী তাঁহার পুত্র অমিত এবং কন্যা আরতির জন্য 20,000 টাকা রাখিয়া গেলেন। আরতির অংশ 5 বৎসর পরে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থে পরিণত হইবে এবং অমিতের অংশ 7 বৎসর পরে সমপরিমাণ অর্থে পরিণত

হইবে। চক্রবৃদ্ধি সুদের হার বার্ষিক 4% হইলে প্রত্যেকের অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর। [C.U.B. Com.]

মনে কর, 20,000 টাকার মধ্যে আরতির অংশ $=x$ এবং 5-বৎসর পরে ইহা y-পরিমাণ অর্থে পরিণত হয়।

অমিতের অংশ $=(20000-x)$ টাকা এবং 7-বৎসর পরে ইহাও y-পরিমাণ অর্থে পরিণত হয়।

সুতরাং $y=x\left(1+\frac{4}{100}\right)^5=(20000-x)\left(1+\frac{4}{100}\right)^7$

সুতরাং $y=x.(1\cdot04)^5$ ... (1)

আবার, $x.(1\cdot04)^5=(20000-x)(1\cdot04)^7$

অথবা $x=(20000-x)(1\cdot04)^2=(20000-x)\times1\cdot0816.$

$\therefore \quad x=\frac{20000\times1\cdot0816}{2\cdot0816}.$

$\therefore$ (1) হইতে, $y=\frac{20000\times1\cdot0816}{2\cdot0816}\times(1\cdot04)^5.$

$\therefore \quad \log y=4\cdot30103+\cdot03406+5\times\cdot01703-\cdot31840=4\cdot10184.$

$\therefore \quad y=\text{Anti-log } 4\cdot10184=12643$ (প্রায়)।

সুতরাং নির্ণেয় নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থ $=12643$ টাকা (প্রায়)।

উদাহরণ 7. একটি মেসিনের অবচয় হয় উহার বর্ষারম্ভের মূল্যের 10%. উহার প্রাথমিক মূল্য ছিল 10,000 টাকা এবং শেষ পর্যন্ত ধাতুমূল্য হিসাবে 3750 টাকা পাওয়া গেল। মেসিনটির কার্যকরী আয়ুষ্কাল নির্ণয় কর। [C.U.B. Com.]

এখানে, অবচয়ের হার $=10\%$.

মনে কর, মেসিনটির কার্যকরী আয়ুষ্কাল $=n$ বৎসর।

ইহা একটি হ্রাসের ক্ষেত্র বলিয়া,

$$3750=10000\left(1-\frac{10}{100}\right)^n=10000\times(\cdot9)^n.$$

$\therefore \quad \log 3750=\log 10000+n\log\cdot9$

অথবা $n=\frac{\log 3750-\log 10000}{\log\cdot9}=\frac{3\cdot57403-4}{\bar{1}\cdot95424}$

$=\frac{\cdot42597}{\cdot04576}=9\cdot3$ (প্রায়)।

সুতরাং নির্ণেয় আয়ুষ্কাল $=9\cdot3$ বৎসর (প্রায়)।

উদাহরণ 8. বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 5 বৎসর পরে দেয় 1800 টাকার বাটা নির্ণয় কর।

এখানে, 5 বৎসর পরে দেয় অর্থের পরিমাণ $=A=1800$ টাকা,

সময় $=n=5$ বৎসর, সুদের হার $=r\%=4\%$.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় বাটা} = \frac{A\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-1\right\}}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n} \text{ টাকা} = 1800\times\frac{(1\cdot04)^5-1}{(1\cdot04)^5} \text{ টাকা}$$

$$=1800[1-(1\cdot04)^{-5}] \text{ টাকা} \quad \cdots \quad (1)$$

এক্ষণে, মনে কর, $(1\cdot04)^{-5}=x$.

$\therefore \log x=-5\log 1\cdot04=-5\times\cdot01703=-\cdot08515=\bar{1}\cdot91485.$

$\therefore x=\text{Anti-log }\bar{1}\cdot91485=\cdot82196.$

সুতরাং, (1) হইতে, নির্ণেয় বাটা $=1800\times(1-\cdot82196)$ টাকা

$=320\cdot47$ টাকা (প্রায়)।

প্রশ্নমালা XI(A)

1. বার্ষিক $4\frac{1}{2}\%$ হারে 1000 টাকার 12 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর।

2. সুদ 6 মাস অন্তর দেয় হইলে, বার্ষিক 3% চক্রবৃদ্ধি হারে 7350 টাকার 10 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত ?

3. বার্ষিক 3% হারে 7646 টাকার 4 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

4. 6 মাস অন্তর দেয় সুদের বার্ষিক হার (নামিক হার) কত হইলে, উহা বৎসর অন্তে দেয় সুদের বার্ষিক 6% হারের সমতুল্য হইবে ?

5. সুদ 3 মাস অন্তর দেয় হইলে, বার্ষিক 4% নামিক হারের (nominal rate) অনুরূপ কার্যকরী হার (effective rate) নির্ণয় কর।

6. বার্ষিক 5% হারে 3 বৎসরের জন্য নিয়োজিত কোন মূলধনের চক্রবৃদ্ধি ও সরল সুদের অন্তর 228 টাকা 75 পয়সা। বার্ষিক 5% হারে ঐ মূলধনের 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর। [B.U.B. Com.]

7. বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হারে কত টাকা লগ্নী করিয়া 18 বৎসরে সুদে-মূলে মোট 10,000 টাকা পাওয়া যাইবে ? [H.S. 1978]

8. চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত আসল, সুদে-আসলে প্রথম বৎসরের শেষে 650 টাকা এবং দ্বিতীয় বৎসরের শেষে 676 টাকা হইবে ?

9. সুদ 6 মাস অন্তর দেয় হইলে, বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে 2 বৎসর অন্তে দেয় 1000 টাকার বর্তমান মূল্য কত ?

10. সুদ 6 মাস অন্তর দেয় হইলে, বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত সময়ে কোন আসল সুদে-আসলে দ্বিগুণিত হইবে ?

11. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত সময়ে কোন মূলধন সুদে-আসলে ত্রিগুণিত হইবে ? [N.B.U B. Com.]

12. বার্ষিক নির্দিষ্ট হারের চক্রবৃদ্ধি সুদে কোন মূলধন a-বৎসরে সুদে-আসলে উহার m-গুণ এবং b-বৎসরে সুদে-আসলে উহার n-গুণ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$b = a \log_m n.$$

13. বার্ষিক নির্দিষ্ট হারের চক্রবৃদ্ধি সুদে কোন মূলধন a, b, c বৎসর অন্তে যথাক্রমে A, B, C-তে পরিণত হইলে, দেখাও যে,

$$(b-c)\log A+(c-a)\log B+(a-b)\log C=0.$$

14. চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 17 বৎসরে কোন আসল সুদে-আসলে দ্বিগুণিত হইলে, বার্ষিক শতকরা সুদের হার কত হইবে ?

15. চক্রবৃদ্ধি হার সুদে নিয়োজিত কোন মূলধন দ্বিতীয় বৎসরান্তে 10,816 টাকা এবং তৃতীয় বৎসরান্তে 11,248·64 টাকা হইল। সুদের হার এবং প্রাথমিক মূলধন নির্ণয় কর। [B.U.B. Com]

16. এক ব্যক্তি তাঁহার 10 বৎসর, 12 বৎসর এবং 14 বৎসর বয়স্ক তিন পুত্রের জন্য যথাক্রমে 10,000 টাকা, 8,000 টাকা এবং 6,000 টাকা রাখিয়া গেলেন। অর্থগুলি যথাক্রমে বার্ষিক 3%, 6% এবং 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে নিয়োজিত হইল। পুত্রত্রয় তাহাদের 21 বৎসর বয়সে এই অর্থ পাইলে, প্রত্যেকে কি পরিমাণ অর্থ পাইবে ? [C. U B. Com.]

17. কোন ব্যক্তি তাঁহার দশ-বৎসর বয়স্ক এবং পনের বৎসর-বয়স্ক দুই পুত্রের জন্য 2500 টাকা এরূপভাবে রাখিয়া গেলেন যেন পুত্রদ্বয় তাহাদের 30 বৎসর বয়সে একই পরিমাণ অর্থ পায়। বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে সুদ ধার্য হইলে, কনিষ্ঠ পুত্র তাহার 10 বৎসর বয়সে কি পরিমাণ অর্থ পাইয়াছিল তাহা নির্ণয় কর। [B. U. B. Com.]

18. কোন ব্যক্তি তাঁহার দুই পুত্রের জন্য 11067 টাকা এই শর্তে রাখিয়া গেলেন যে, জ্যেষ্ঠ পুত্র 3 বৎসর অন্তে এবং কনিষ্ঠ পুত্র 7 বৎসর অন্তে নিজ নিজ অংশ পাইবে এবং তাহাদের প্রাপ্য অংশের পরিমাণ একই হইবে। বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হারে সুদ ধার্য হইলে প্রত্যেকের অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

19. প্রতি বৎসর কোন মেসিনের মূল্য উহার পূর্ববর্তী বৎসরের মূল্যের 10% অবচয় হয়। চতুর্থ বৎসর অন্তে উহার মূল্য 1,31,220 টাকা হইলে, মেসিনটির প্রাথমিক মূল্য কত ছিল ?

20. একটি মেসিনের আয়ুষ্কাল ধরা হয় 10 বৎসর এবং উহার ক্রয়মূল্য 10,000 টাকা। অবচয়ের জন্য যদি প্রতি বৎসর বর্ষারম্ভের মূল্যের 10% বাদ দেওয়া হয়, তাহা হইলে আয়ুষ্কাল অন্তে মেসিনটির ধাতুমূল্য নির্ণয় কর।

21. একটি মেসিনের অবচয় হয় উহার বর্ষারম্ভের মূল্যের 20%. উহার প্রাথমিক মূল্য ছিল 1,00,000 টাকা এবং শেষ পর্যন্ত ধাতুমূল্য হিসাবে 30,000 টাকা পাওয়া গেল। মেসিনটির কার্যকরী আয়ুষ্কাল নির্ণয় কর। [B.U.B. Com.]

22. কোন মহাজনের নিকট হইতে এক ব্যক্তি 6000 টাকা ঋণ গ্রহণ করিলেন, কিন্তু 4 বৎসরের মধ্যে কোন টাকাই পরিশোধ করিতে পারিলেন না। চুক্তি অনুযায়ী মহাজন তাঁহার নিকট 7500 টাকা দাবী করিলেন। মহাজন চক্রবৃদ্ধি হার সুদে বার্ষিক শতকরা কত ধরিয়াছিলেন ?

23. কোন শহরে বৎসরান্তে জনসংখ্যার বৃদ্ধির হার ঐ বৎসরের আরম্ভে যে-জনসংখ্যা থাকে তাহার শতকরা 2 ভাগ। কত সময়ে জনসংখ্যা মোট 40% বৃদ্ধি পাইবে ?

24. কোন পাত্র হইতে বায়ু নিষ্কাশনের জন্য ব্যবহৃত একটি পাম্প প্রতি আঘাতে অধিকৃত বায়ুর এক দশমাংশ বাহির করে। দ্বাদশ আঘাতের পর বায়ুর মূল আয়তনের কত অংশ অবশিষ্ট থাকে, তাহা নির্ণয় কর।

25. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 3 বৎসর পরে দেয় 4630 টাকা 50 পয়সার বাটা নির্ণয় কর।

B. বার্ষিকী বা বার্ষিক বৃত্তি

11·5. সংজ্ঞা :

কোন শর্তাধীনে একই সময় পরপর একই পরিমাণ অর্থ দেওয়া হইলে বা পাওয়া যাইলে (যেমন, সুদ, খাজনা, পেনসন্ ইত্যাদি), ঐ অর্থকে **বার্ষিকী** বা **বার্ষিকবৃত্তি** (Annuity) বলে। সাধারণতঃ এক বৎসর পরপর অর্থ দেওয়া হয়। তবে 6 মাস, 3 মাস, 1 মাস, ইত্যাদি পরপরও অর্থ দেওয়া যাইতে পারে। ইহাকে বার্ষিকীর **পর্ব** বলে। প্রতি বৎসর A টাকা দেওয়া হইলে, উক্ত বার্ষিকীকে A টাকার বার্ষিকী বলা হয়। যে-বার্ষিকীর টাকা প্রতি পর্বের শেষে দেওয়া হয়, তাহাকে **প্রত্যক্ষ বার্ষিকী** (Immediate Annuity) বলে। যে-বার্ষিকীর টাকা প্রতি পর্বের সুরুতে দেওয়া হয়, তাহাকে **দেয় বার্ষিকী** (Annuity Due) বলে। কোনরূপ উল্লেখ না থাকিলে, বার্ষিকী বলিলে প্রত্যক্ষ বার্ষিকী এবং উহার পর্ব 1 বৎসর ধরা হয়।

কোন বার্ষিকীর টাকা নির্দিষ্ট কয়েক বৎসর (বা পর্ব) পর্যন্ত দেওয়া হইলে, ঐরূপ বার্ষিকীকে **নির্দিষ্ট সময় পর্যন্ত দেয় বার্ষিকী** (Annuity certain) বলে।

যে-বার্ষিকীর টাকা চিরকাল দেয় হয়, তাহাকে **চিরস্থায়ী বার্ষিকী** (Perpetual Annuity বা Perpetuity) বলে। যদি কোন বার্ষিকী কোন নির্দিষ্ট সময়ের জন্য অনাদায়ী বা বাকী থাকে, তাহা হইলে ঐ বার্ষিকীকে ঐ নির্দিষ্ট সময়ের জন্য **অনাদায়ী** (unpaid বা foreborne) বলে। অনাদায়ী সময়ের জন্য সুদসহ বিভিন্ন কিস্তির সমষ্টি হইল অনাদায়ী বার্ষিকীর **মোট পরিমাণ** (amount)। এক্ষেত্রে মনে রাখিতে হইবে যে, বার্ষিকীর ক্ষেত্রে সুদ সর্বদাই চক্রবৃদ্ধি হারে গণনা করা হয় এবং প্রতিটি কিস্তিকে উহার অনাদায়ী সময়ের সুদসহ লওয়া হয়।

যে-বার্ষিকী কিছু সময় অন্তে কার্যকরী হয়, তাহাকে **বিলম্বিত বার্ষিকী** (Deferred Annuity) বলে। কোন বার্ষিকী n-বৎসরের জন্য বিলম্বিত হইলে, উহা n-বৎসর পরে স্বরু হইবে এবং উহার প্রথম কিস্তির টাকা $(n+1)$-বৎসর পরে দেয় হইবে। যে-বার্ষিকী কিছু সময় পরে স্বরু হইয়া বরাবর চলিতে থাকে, তাহাকে **বিলম্বিত চিরস্থায়ী বার্ষিকী** (Deferred Perpetuity) বলে।

প্রদত্ত সময় পর্যন্ত দেয় বার্ষিকীর **বর্তমান মূল্য** (Present value) হইবে সেই টাকা, যাহা ঐ সময়ের সুদসহ একত্রে বার্ষিকীর মোট পরিমাণের সমান হইবে। সুতরাং কোন বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য উহার বিভিন্ন কিস্তির বর্তমান মূল্যের সমষ্টি। কোন বার্ষিকীর বর্তমান মূল্যকে উহার **ক্রয়মূল্য** বা সংক্ষেপে **মূল্য** বলে।

কোন নির্দিষ্ট সময়ের সত্ত্বাধিকার বিশিষ্ট সম্পত্তিকে **লিজ-সম্পত্তি** (Lease-hold estate) বলে। চিরস্থায়ী বার্ষিকী উৎপন্নকারী সম্পত্তিকে **চিরসত্ত্ব-সম্পত্তি** (Free-hold estate) এবং উক্ত চিরস্থায়ী বার্ষিকীকে **খাজনা** (rent) বলে। কোন চিরসত্ত্ব সম্পত্তির মূল্য, উহার খাজনার বর্তমান মূল্যের সমান।

A-টাকার বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য n A-টাকা হইলে, বলা হয় যে, ঐ বার্ষিকী n-বৎসরের জন্য ক্রীত।

কোন নির্দিষ্ট দায় (liability) খারিজ করিবার জন্য অথবা ভবিষ্যতে কোন নির্দিষ্ট সময়ে কোন অপচয়ী সম্পত্তি বদলাইবার জন্য প্রতি বৎসর চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা লগ্নী করিয়া যে-তহবিল গঠন করা হয়, তাহাকে **ঋণশোধক তহবিল** (Sinking Fund) বলে।

11·6. অনাদায়ী বার্ষিকীর মোট পরিমাণ ঃ

মনে কর, বার্ষিকী $=A$ টাকা, সুদের হার $=r\%$, অনাদায়ের সময় $=n$ বৎসর, এবং n-বৎসরের জন্য অনাদায়ী বার্ষিকীর মোট পরিমাণ $=M$ টাকা।

বার্ষিকী n-বৎসরের জন্য অনাদায়ী বলিয়া, প্রথম কিস্তির টাকা (যাহা প্রথম

বৎসর অন্তে দেয়) $(n-1)$-বৎসরের সুদ অর্জন করিবে। অনুরূপভাবে, দ্বিতীয় কিস্তির টাকা $(n-2)$-বৎসরের সুদ অর্জন করিবে এবং এইরূপভাবে চলিতে থাকিবে। শেষ কিস্তির টাকার কোন সুদ হইবে না। চক্রবৃদ্ধিহারে সুদ ধরিলে,

প্রথম কিস্তির সবৃদ্ধিমূল $=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}$,

দ্বিতীয় কিস্তির সবৃদ্ধিমূল $=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-2}$,

তৃতীয় কিস্তির সবৃদ্ধিমূল $=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-3}$,

... ...

শেষ কিস্তির সবৃদ্ধিমূল $=A$.

$\therefore$ $M=$ বিভিন্ন কিস্তিতে দেয় টাকার সবৃদ্ধিমূলের যোগফল

$$=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}+A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-2}+\cdots+A\left(1+\frac{r}{100}\right)+A$$

$$=A\left\{1+\left(1+\frac{r}{100}\right)+\cdots\cdots+\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=A\left\{\frac{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}-1}{1+\frac{r}{100}-1}\right\}=\frac{100A}{r}\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}-1\right\}.$$

1 একক মূলধনের এক বৎসরের সুদ i হইলে, অর্থাৎ $\frac{r}{100}=i$ হইলে,

$$M=\frac{A}{i}\{(1+i)^{n}-1\}.$$

অনুসিদ্ধান্ত : চক্রবৃদ্ধি হারে সুদ না ধরিয়া সরল সুদ ধরিলে, প্রথম কিস্তির সবৃদ্ধিমূল হয়,

$A\left\{1+(n-1)\frac{r}{100}\right\}$, দ্বিতীয় কিস্তির সবৃদ্ধিমূল হয় $A\left\{1+(n-2)\frac{r}{100}\right\}$, ইত্যাদি।

$$\therefore\quad M=A\left\{1+(n-1)\frac{r}{100}\right\}+A\left\{1+(n-2)\frac{r}{100}\right\}+\cdots\cdots+A$$

$$=nA+\tfrac{1}{200}n(n-1)rA=nA\{1+\tfrac{1}{200}(n-1)r\}.$$

টীকা : প্রতি বৎসর A পরিমাণ অর্থ পৃথক করিয়া রাখিয়া, n-বৎসর পরে যে-দায় খারিজ হইবে তাহার পরিমাণকে M ধরিলে,

$M=$ বার্ষিকী A-এর n-বৎসরের মোট পরিমাণ $=\frac{A}{i}\left\{(1+i)^{n}-1\right\}$.

11·7. বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য ঃ

(a) নির্দিষ্ট সময় পর্যন্ত দেয় বার্ষিকী

মনে কর, বার্ষিকী $=A$, সুদের হার $=r\%$, বার্ষিকীটি n-বৎসর পর্যন্ত দেয় এবং উহার বর্তমান মূল্য $=V$.

প্রথম কিস্তির বর্তমান মূল্য $=\dfrac{A}{1+\frac{r}{100}}$,

দ্বিতীয় কিস্তির বর্তমান মূল্য $=\dfrac{A}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^2}$,

... ...

n-তম কিস্তির বর্তমান মূল্য $=\dfrac{A}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$.

$\therefore$ $V=$ বিভিন্ন কিস্তিতে দেয় অর্থের বর্তমান মূল্যের সমষ্টি

$$=\frac{A}{1+\frac{r}{100}}+\frac{A}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^2}+\cdots+\frac{A}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$$

$$=\frac{A}{1+\frac{r}{100}}\left\{\frac{1-\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}}{1-\frac{1}{1+\frac{r}{100}}}\right\}=\frac{100A}{r}\left\{1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}\right\}.$$

1 একক মূলধনের এক বৎসরের সুদ i হইলে, অর্থাৎ $\frac{r}{100}=i$ হইলে,

$$V=\frac{A}{i}\left\{1-\frac{1}{(1+i)^n}\right\}.$$

টীকা ঃ বার্ষিকীটি চিরস্থায়ী হইলে, n-এর মান অসীম হইবে, অর্থাৎ $\frac{1}{(1+i)^n}$-এর মান শূন্য ধরা যাইবে।

সুতরাং চিরস্থায়ী বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য $V=\dfrac{100A}{r}=\dfrac{A}{i}$.

(b) বিলম্বিত বার্ষিকী

মনে কর, বার্ষিকী $=A$, সুদের হার $=r\%$, বিলম্বিত বার্ষিকীটি m-বৎসর পরে সুরু হইয়া তাহার পর n-বৎসর ধরিয়া চলে এবং উহার বর্তমান মূল্য $=V$.

বার্ষিকীটি m-বৎসর পরে সুরু হইলে, উহার প্রথম কিস্তি $(m+1)$-বৎসর পরে দেয় হইবে, দ্বিতীয় কিস্তি $(m+2)$-বৎসর পরে দেয় হইবে এবং এরূপভাবে চলিতে থাকিবে।

সুতরাং প্রথম কিস্তির বর্তমান মূল্য $=\dfrac{A}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{m+1}}$,

দ্বিতীয় কিস্তির বর্তমান মূল্য $=\dfrac{A}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{m+2}}$,

... ...

n-তম কিস্তির বর্তমান মূল্য $=\dfrac{A}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{m+n}}$.

$$\therefore\quad V=\frac{A}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{m+1}}+\frac{A}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{m+2}}+\cdots\cdots+\frac{A}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{m+n}}$$

$$=\frac{A}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{m+1}}\left\{\frac{1-\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}}{1-\dfrac{1}{1+\frac{r}{100}}}\right\}=\frac{100A}{r}\,\frac{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}-1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{m+n}}.$$

1-একক মূলধনের এক বৎসরের সুদ i হইলে, অর্থাৎ $\frac{r}{100}=i$ হইলে,

$$V=\frac{A}{i}\,\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{m+n}}.$$

পুনরায়, $V=\dfrac{A}{i}\,\dfrac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{m+n}}=\dfrac{A}{i}\left[\dfrac{1}{(1+i)^m}-\dfrac{1}{(1+i)^{m+n}}\right]$

$=\dfrac{A}{i}\left[1-\dfrac{1}{(1+i)^{m+n}}\right]-\dfrac{A}{i}\left[1-\dfrac{1}{(1+i)^m}\right]$

$=(m+n)$-বৎসরের জন্য দেয় বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য

$-\,m$-বৎসরের জন্য দেয় বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য।

টীকা : m-বৎসর পরে কার্যকরী বিলম্বিত বার্ষিকীটি চিরস্থায়ী হইলে, n-এর মান অসীম হইবে, অর্থাৎ $\dfrac{1}{(1+i)^n}$ -এর মান শূন্য ধরা যাইবে।

এক্ষণে, বিলম্বিত বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য V-কে লেখা যায়,

$$V=\frac{A}{i}\;\frac{1-\dfrac{1}{(1+i)^n}}{(1+i)^m}.$$

$\therefore$ বিলম্বিত চিরস্থায়ী বার্ষিকীটির বর্তমান মূল্য $V=\dfrac{A}{i}\cdot\dfrac{1}{(1+i)^m}.$

11·8. বৎসর শেষে দেয় নয় এরূপ বার্ষিকী ঃ

মনে কর, A টাকার বার্ষিকী বৎসরে m-বার দেয়, অর্থাৎ $\frac{A}{m}$ টাকা $\frac{1}{m}$-বৎসর পর পর দেয় এবং বৎসরে m-বার চক্রবৃদ্ধির সুদের হিসাব হয়, অর্থাৎ, চক্রবৃদ্ধির পর্ব হইল $\frac{1}{m}$-বৎসর। এক্ষেত্রে, n-বৎসরে কিস্তির সংখ্যা $= mn$.

সুতরাং বৎসর অন্তে দেয় বার্ষিকীর সূত্রগুলিতে A-এর স্থলে $\frac{A}{m}$, n-এর স্থলে mn এবং r-এর স্থলে $\frac{r}{m}$ লিখিলেই, নির্ণেয় সূত্রগুলি পাওয়া যাইবে।

11·9. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. বার্ষিক 5% হার চক্রবৃদ্ধি সুদে 100 টাকার অনাদায়ী বার্ষিকীর 10 বৎসরের মোট পরিমাণ নির্ণয় কর। [C. U. B. Com.]

এখানে, বার্ষিকী $= A = 100$ টাকা, অনাদায়ের সময় $= n = 10$ বৎসর এবং সুদের হার $= r\% = 5\%$.

মনে কর, 10-বৎসরের জন্য অনাদায়ী বার্ষিকীটির মোট পরিমাণ M টাকা।

$$\therefore \quad M = \frac{100A}{r}\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right\} = \frac{100 \times 100}{5}\left\{\left(1+\frac{5}{100}\right)^{10} - 1\right\}$$
$$= 2000\{(1·05)^{10} - 1\} \quad \cdots \quad (1)$$

এক্ষণে, মনে কর, $(1·05)^{10} = x$.

$$\therefore \quad \log x = 10 \log 1·05 = 10 \times ·02119 = ·2119.$$
$$\therefore \quad x = \text{Anti-log } ·2119 = 1·6289.$$

$\therefore$ (1) হইতে, $M = 2000 \times ·6289 = 1257·8$.

সুতরাং নির্ণেয় মোট পরিমাণ 1257 8 টাকা।

উদাহরণ 2. সুদের হার 4% হইলে, 5 বৎসরের জন্য চালু 300 টাকার বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর।

($\log 104 = 2·0170333$ এবং $\log ·0821923 = \bar{2}·9148335$)

[N. B. U. B. Com.]

এখানে. বার্ষিকী $= A = 300$ টাকা, সময় $= n = 5$ বৎসর এবং সুদের হার $= r\% = 4\%$.

মনে কর, 5-বৎসরের জন্য চালু বার্ষিকীটির বর্তমান মূল্য $= V$ টাকা।

$$\therefore \quad V = \frac{100A}{r}\left\{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}\right\} = \frac{100 \times 300}{4}\left\{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{4}{100}\right)^5}\right\}$$
$$= 7500\{1 - (1·04)^{-5}\} \quad \cdots \quad (1)$$

এক্ষণে, মনে কর, $(1\cdot04)^{-5}=x$.

$\therefore \ \log x = -5\log 1\cdot04 = -5\times\cdot0170333 = -\cdot0851665$

$= \bar{1}\cdot9148335 = \log\ \cdot821923.$

$\therefore \ x = \cdot821923.$

$\therefore$ (1) হইতে, $V = 7500\times\cdot178077 = 1335\cdot58$ (প্রায়) ।

স্থতরাং নির্ণেয় বর্তমান মূল্য 1335·58 টাকা (প্রায়)।

উদাহরণ 3. বার্ষিক 3% হারে 1800 টাকার চিরস্থায়ী বার্ষিকীর মূল্য (অর্থাৎ বর্তমান মূল্য) কত হইবে ?

এখানে, বার্ষিকী $= A = 1800$ টাকা এবং স্থদের হার $= r\% = 3\%$.

মনে কর, চিরস্থায়ী বার্ষিকীটির বর্তমান মূল্য V টাকা।

$$\therefore \quad V = \frac{100A}{r} = \frac{100\times1800}{3} = 60000.$$

স্থতরাং চিরস্থায়ী বার্ষিকীটির মূল্য 60,000 টাকা।

উদাহরণ 4. এক ব্যক্তি 40,000 টাকা মূল্যের একটি বাড়ী এই শর্তে ক্রয় করিলেন যে, বাড়ীটি ক্রয়ের সময় তিনি নগদ 10,000 টাকা দিবেন এবং ইহার এক বৎসর পর হইতে স্থরু করিয়া 10টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে বাকী টাকার ঋণ পরিশোধ করিবেন। বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি স্থদ সমেত আসল টাকা দিতে হইলে, প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [B.U.B Com.]

বাড়ীটির মূল্য 40,000 টাকা। বাড়ীটি ক্রয়ের সময় 10,000 টাকা দিলে, আর বাকী থাকে 30,000 টাকা। এই বাকী টাকা 10টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে পরিশোধ করিতে হইবে।

মনে কর, প্রতি কিস্তির পরিমাণ $= A$ টাকা ; তাহা হইলে,

ঐ বাকী 30,000 টাকা = বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি স্থদে 10 বৎসরের জন্য চালু A টাকার বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য V.

এখানে, স্থদের হার $= r\% = 5\%$ এবং সময় $= n = 10$ বৎসর।

$\therefore \quad V = \dfrac{100A}{r}\left\{1-\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^{-n}\right\}$ সূত্র হইতে,

$$30{,}000 = \frac{100A}{5}\left\{1-(1\cdot05)^{-10}\right\}.$$

$$\therefore \quad A = \frac{1500}{1-(1\cdot05)^{-10}} \qquad \ldots \quad (1)$$

এক্ষণে, মনে কর, $(1\cdot05)^{-10}=x$.

$\therefore \quad \log x=-10 \log 1\cdot05=-10\times\cdot02119=-\cdot2119=\bar{1}\cdot7881.$

$\therefore \quad x=\text{Anti-log } \bar{1}\cdot7881=\cdot6139.$

$\therefore$ (1) হইতে, $A=\dfrac{1500}{1-\cdot6139}=\dfrac{1500}{\cdot3861}=3885$ (প্রায়)।

সুতরাং, নির্ণেয় কিস্তির পরিমাণ 3885 টাকা (প্রায়)।

উদাহরণ 5. সুদের হার বার্ষিক $3\frac{1}{2}\%$ হইলে, 4 বৎসর দেয় 60 টাকার বার্ষিকী ক্রয় করিতে কত টাকা লাগিবে ?

বার্ষিকীর মূল্য = বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য।

এখানে, বার্ষিকী $=A=60$ টাকা, সময় $=n=4$ বৎসর এবং সুদের হার $=r\%=3\frac{1}{2}\%$.

মনে কর, বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য $=V$ টাকা।

$$\therefore \quad V=\frac{100A}{r}\left\{1-\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}\right\}=\frac{100\times60}{3\cdot5}\left\{1-(1\cdot035)^{-4}\right\} \quad \cdots(1)$$

মনে কর, $(1\cdot035)^{-4}=x$.

$\therefore \quad \log x=-4 \log 1\cdot035=-4\times\cdot01492=-\cdot05968=\bar{1}\cdot94032.$

$\therefore \quad x=\text{Anti-log } \bar{1}\cdot94032=\cdot87161.$

$\therefore$ (1) হইতে,

$V=\dfrac{60000}{35}\left(1-\cdot87161\right)=\dfrac{12000}{7}\times\cdot12839=220\cdot1$ (প্রায়)।

সুতরাং নির্ণেয় অর্থের পরিমাণ 220·1 টাকা (প্রায়)।

উদাহরণ 6. কোন প্রতিষ্ঠান বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 10,000 টাকা ঋণ করিয়া প্রতি বৎসর 1000 টাকা হিসাবে দিতে সুরু করিলেন। ঋণ শোধ হইতে কত সময় লাগিবে ? [C. U' B. Com.]

এখানে, বার্ষিকী $=A=1000$ টাকা, সুদের হার $=r\%=5\%$.

বার্ষিকীটির বর্তমান মূল্য $=V=10{,}000$ টাকা।

মনে কর, সময় $=n$ বৎসর।

$\therefore \quad V=\dfrac{100A}{r}\left\{1-\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^{-n}\right\}$ সূত্র হইতে,

$10{,}000=\frac{100\times1000}{5}\{1-(1\cdot05)^{-n}\}$

অথবা, $1-(1\cdot05)^{-n}=\cdot5$ অথবা, $(1\cdot05)^{-n}=\cdot5$.

$\therefore \quad -n \log 1\cdot05=\log \cdot5$

অথবা, $n=\dfrac{-\bar{1}\cdot69897}{02119}=\dfrac{\cdot30103}{\cdot02119}=14\cdot2$ (প্রায়)।

সুতরাং ঋণ শোধ করিতে প্রতিষ্ঠানের প্রায় 14·2 বৎসর সময় লাগিবে।

উদাহরণ 7. 10 বৎসর চলিবে এরূপ একটি 150 টাকার বার্ষিকী এবং 7 বৎসর পরে সুরু হইবে এরূপ একটি বার্ষিক 79·20 টাকার চিরসত্ব সম্পত্তির পরিবর্তন (reversion)—ইহাদের মধ্যে বার্ষিক 5% সুদে কোন্‌টি বেশী লাভজনক ?

এখানে, দুইটি বার্ষিকীর বর্তমান মূল্যের মধ্যে তুলনা করিতে হইবে। যেইটির বর্তমান মূল্য অধিক, সেইটিই হইবে বেশী লাভজনক।

মনে কর, প্রথমটির বর্তমান মূল্য V_1 টাকা এবং দ্বিতীয়টির বর্তমান মূল্য V_2 টাকা।

প্রথমটির ক্ষেত্রে, বার্ষিকী $=A=150$ টাকা, সময় $=n=10$ বৎসর এবং সুদের হার $=r\%=5\%$.

$$\therefore \quad V_1=\frac{100A}{r}\left\{1-\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}\right\}$$

$$=\frac{100\times150}{5}\left\{1-(1\cdot05)^{-10}\right\}=3000(1-\cdot6139)=1158\cdot3,$$

[উদাহরণ 4-এ দেখান হইয়াছে যে, $(1\cdot05)^{-10}=\cdot6139$]

অর্থাৎ প্রথমটির বর্তমান মূল্য 1158·3 টাকা।

দ্বিতীয়টি 7 বৎসরের জন্য বিলম্বিত একটি চিরস্থায়ী বার্ষিকীর সমতুল্য।

এক্ষেত্রে, বার্ষিকী $=A=79\cdot20$ টাকা, সুদের হার $=r\%=5\%$ এবং বিলম্বের সময় $=m=7$ বৎসর।

$$\therefore V_2=\frac{100A}{r}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^m}=\frac{100\times79\cdot2}{5}\cdot\frac{1}{(1\cdot05)^7}=1584\times(1\cdot05)^{-7}.$$

$$\therefore \log V_2=\log 1584-7\log1\cdot05=3\cdot19976-7\times\cdot02119=3\cdot05143.$$

$$\therefore \quad V_2=\text{Anti-log } 3\cdot05143=1125\cdot8,$$

অর্থাৎ দ্বিতীয়টির বর্তমান মূল্য 1125·8 টাকা।

প্রথমটির বর্তমান মূল্য বেশী বলিয়া, প্রথমটিই বেশী লাভজনক।

সুতরাং চিরসত্ব সম্পত্তিটি অপেক্ষা বার্ষিকীটিই বেশী লাভজনক।

উদাহরণ 8. প্রতি ছয় মাস পরপর 250 টাকা বিনিয়োগ কারয়া একটি ঋণশোধক তহবিল গঠন করা হইল। ছয় মাস অন্তর সুদ দেওয়া হইবে, এই ভিত্তিতে বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হারে সুদ ধার্য হইল। প্রতি অর্ধ-বৎসর অন্তে লগ্নীগুলি করা হইয়াছে এইরূপ ধরিয়া লইয়া 6 বৎসর অন্তে তহবিলের মোট পরিমাণ নির্ণয় কর। (log 102 = 2·0086002 এবং log 126824 = 5·1032024 দেওয়া আছে)

মনে কর, 6 বৎসর অন্তে তহবিলের মোট পরিমাণ M টাকা।

এখানে, $M=\frac{100A}{r}\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-1\right\}$ সূত্রে,

$A=350$ টাকা, $r=\frac{4}{2}=2$, $n=6\times 2=12$.

$\therefore\quad M=\frac{100\times 350}{2}\left\{\left(1+\frac{2}{100}\right)^{12}-1\right\}=17500\{(1{\cdot}02)^{12}-1\}.\quad\cdots(1)$

মনে কর, $(1{\cdot}02)^{12}=x$.

$\therefore\quad \log x=12\log 1{\cdot}02=12\times{\cdot}0086002={\cdot}1032024=\log 1{\cdot}26824.$

$\therefore\quad x=1{\cdot}26824.$

$\therefore$ (1) হইতে, $M=17500\times{\cdot}26824=4694{\cdot}2.$

সুতরাং 6 বৎসর অন্তে তহবিলের নির্ণেয় মোট পরিমাণ 4694·20 টাকা।

প্রশ্নমালা XI (B)

1. এক ব্যক্তি প্রতি বৎসরের শেষে একটি ব্যাঙ্কে 300 টাকা করিয়া জমা দিতে মনস্থির করিলেন। বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার 3% হইলে এবং কিস্তিগুলি সব জমিতে থাকিলে, 15 বৎসরের শেষে মোট কত জমিবে ?

2. সুদের হার $3\frac{1}{2}$% হইলে, 12 বৎসরের জন্য চালু 150 টাকার বার্ষিকীর মোট পরিমাণ এবং বর্তমান মূল্য কত হইবে ? [$(1{\cdot}035)^{12}=1{\cdot}511066$ ধর]

3. বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হারে 10 বৎসর দেয় 100 টাকার প্রত্যক্ষ বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর।

4. একটি চিরসত্ব সম্পত্তির বাৎসরিক খাজনা 1000 টাকা। বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি সুদ ধার্য করিলে সম্পত্তিটির মূল্য কত হইবে ?

5. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদ চাহিলে, একটি চিরসত্ব সম্পত্তির জন্য কত বৎসরের খরিদ প্রয়োজন ?

[চিরসত্ব সম্পত্তির মূল্য = চিরস্থায়ী বার্ষিকী (খাজনা) A-এর বর্তমান-মূল্য $=\frac{A}{i}=Ax$, যদি সম্পত্তিটির x-বৎসরের খরিদ প্রয়োজন হয়, ইত্যাদি।]

6. প্রতি বৎসর 90 টাকার বৃত্তিদানের জন্য কোন শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের 4000 টাকার প্রয়োজন হইল। স্থির হইল যে, প্রথম বৃত্তিটি এক বৎসর অন্তে দেওয়া হইবে। সুদ চক্রবৃদ্ধি হারে গণ্য করিয়া বার্ষিক শতকরা সুদের হার নির্ণয় কর।

7. কোন প্রতিষ্ঠান বার্ষিক $4\frac{1}{2}$% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 31200 টাকা ঋণ করিয়া প্রতি বৎসর 2400 টাকা হিসাবে দিতে শুরু করিলেন। ঋণ শোধ হইতে কত সময় লাগিবে ?

8. প্রতি বৎসরের শেষে আসল ও সুদ সমেত 6টি সমান কিস্তিতে ঋণ পরিশোধ করিবার শর্তে রাজী হইয়া এক ব্যক্তি বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধিতে 4,000 টাকা ধার লইলেন। প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [B. U. B. Com]

9. প্রতি বৎসরের শেষে আসল ও সুদ সমেত 10টি সমান কিস্তিতে ঋণ পরিশোধ করিবার শর্তে রাজী হইয়া এস. রায় 4% চক্রবৃদ্ধিতে 20,000 টাকা ধার লইলেন। প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [C. U. B. Com.]

10. জমা-অতিরিক্ত 40,000 টাকা 30 বৎসরে সমান বার্ষিক কিস্তিতে শোধ করিয়া দেওয়া হইবে স্থির হইল। বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হারে প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [C. U. B. Com.]

11. পি. দে 25,000 টাকা মূল্যের একটি বাড়ী ক্রয় করিতে ইচ্ছুক। তিনি নগদ 10,000 টাকা দিয়া, বাকী টাকাটা 15টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে পরিশোধ করিতে চুক্তিবদ্ধ, বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদে প্রতি বৎসর তাঁহাকে কত দিতে হইবে ? [B. U. B. Com.]

12. 1969 সালের 1লা জুলাই এক ব্যক্তি বৃত্তি দানের উদ্দেশ্যে, বিশ্ববিদ্যালয়ের ব্যাঙ্কে কিছু টাকা জমা দিয়া চুক্তি করিলেন যে, (i) বৎসরে 1,000 টাকা মূল্যের বৃত্তি 10 বৎসরের জন্য প্রদান করিতে হইবে, এবং (ii) বৎসরে 500 টাকা মূল্যের পুস্তক-পুরস্কার 20 বৎসরের জন্য প্রদান করিতে হইবে। বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে সুদসমেত ঐ গচ্ছিত অর্থ উক্ত 20 বৎসরে নিঃশেষিত হইয়া যাইবে। 1970 সালের 1লা জুলাই হইতে আরম্ভ করিয়া প্রতি বৎসর 1লা জুলাই বৃত্তি দান করিলে, ব্যক্তিটি 1969 সালের 1লা জুলাই বিশ্ববিদ্যালয়ের ব্যাঙ্কে কত টাকা জমা দিয়াছিলেন, তাহা নির্ণয় কর। [C. U. B. Com.]

13. চুক্তিপত্র স্বাক্ষরের দিন 5,000 টাকা দিয়া এবং প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ বৎসরের শেষে 3,000 টাকা করিয়া চারিটি বার্ষিক কিস্তি দিয়া একটি ওয়াগন ক্রয় করা হইল। বার্ষিক 5% হারে চক্রবৃদ্ধি সুদের হার ধার্য হইলে, ওয়াগনটির নগদ (cash down) মূল্য কত ছিল ? [C. U. B. Com.]

14. সুদের হার বার্ষিক $3\frac{1}{2}$% হইলে, 4000 টাকা দিয়া 28 বৎসরের জন্য কত টাকার বার্ষিকী ক্রয় করা যাইবে ?

15. সুদের হার বার্ষিক $4\frac{1}{2}$% হইলে, 25 বৎসর দের 1800 টাকার বার্ষিকী ক্রয় করিতে কত টাকার প্রয়োজন ?

16. 1,00,000 টাকাতে 30 বৎসরের জন্য একটি লীজ (lease)-কে 40 বৎসরের জন্য করিতে হইলে, বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত জরিমানা লাগিবে ?

[মনে কর, বাৎসরিক খাজনা $=P$. এখানে, 1,00,000 টাকা $=$ 30 বৎসরের জন্য বাৎসরিক খাজনা P-এর বর্তমান মূল্য। নির্ণেয় জরিমানা $=x$ হইলে, $x=$ 30 বৎসর পরে কার্যকরী 10 বৎসরের জন্য P বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য, ইত্যাদি।]

17. গৌতম 6% হার চক্রবৃদ্ধিতে এই প্রতিশ্রুতিতে 20,000 টাকা ঋণ করিল যে, সুদ ও আসলের ভার লঘু করিবার জন্য প্রথম চারি বৎসরের প্রতি বৎসরের শেষে 5,000 টাকা হিসাবে শোধ করিবে এবং বাকী ঋণ পঞ্চম বৎসরের শেষে শোধ করিবে। শেষ কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

18. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 7 বৎসর পরে কার্যকরী হইবে এরূপ একটি মাসিক 33 টাকার চিরস্থায়ী বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য কত ?

19. বার্ষিক $3\frac{1}{2}\%$ চক্রবৃদ্ধিতে 20 বৎসর চলিবে এরূপ একটি 80 টাকার বার্ষিকী এবং বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধিতে 50 টাকার একটি চিরস্থায়ী বার্ষিকীর মধ্যে কোন্‌টি বেশী লাভজনক ?

20. পরমেশবাবু 60 বৎসর বয়সে অবসর গ্রহণ করিলেন। তাঁহার মালিক পরমেশবাবুর জীবদ্দশার বাকী সময়ের জন্য অর্ধ-বাৎসরিক কিস্তিতে দেওয়া হইবে, এই ভিত্তিতে বাৎসরিক 1200 টাকার পেন্সন অনুমোদন করিলেন। পরমেশবাবু 73 বৎসর বয়স পর্যন্ত জীবিত থাকিলে এবং বার্ষিক 4% হারের সুদ 6 মাস অন্তর দেওয়া হইলে, পেন্সন বাবদ সমগ্র অর্থ এককালীন কি পরিমাণ অর্থের সমান হইবে, নির্ণয় কর।

21. কোন সীমিত সঙ্ঘ 25 বৎসর অন্তে 1,00,000 টাকার সম্পত্তি বদলাইবার জন্য একটি অপচয়ী তহবিল গঠন করিতে ইচ্ছুক। সুদের হার বার্ষিক 3% হইলে, লাভের টাকা হইতে প্রতি বৎসর কি পরিমাণ টাকা পৃথক করিয়া রাখিতে হইবে নির্ণয় কর। [C. U. B. Com.]

22. 25 বৎসর অন্তে 1,00,000 টাকার ডিবেঞ্চার পরিশোধ করিবার উদ্দেশ্যে একটি ঋণশোধক তহবিল গঠন করা হইল। লগ্নীকৃত অর্থ হইতে বার্ষিক 4% সুদ পাওয়া গেলে, ঋণশোধক তহবিলের জন্য মোট লাভ হইতে প্রতিবৎসর কি পরিমাণ অর্থ পৃথক করিয়া রাখিতে হইবে ? [B. U. B. Com.]

23. 20 বৎসর অন্তে 2,00,000 টাকা মূল্যের একটি মেসিন একই মূল্যের অপর একটি মেসিন দ্বারা বদলাইবার জন্য একটি তহবিল গঠন করা হইল। লগ্নীকৃত অর্থ বার্ষিক 6% হারে সুদ পাইলে ঐ তহবিলের জন্য লাভ হইতে প্রতি বৎসর কত টাকা পৃথক করিয়া রাখিতে হইবে ? [C. U. B. Com.]

24. 5% চক্রবৃদ্ধি হারের স্থদে প্রতি বৎসর কতটাকা লগ্নীকৃত করিলে 20 বৎসর পরে একটি যন্ত্র অপসারণ করিয়া সেইরূপ আর একটি যন্ত্রের পুনঃস্থাপন করা যাইবে? যন্ত্রটির বর্তমান মূল্য 60,000 টাকা এবং 20 বৎসর পরে ঐরূপ যন্ত্রের মূল্য 25% বাড়িবে বলিয়া অনুমান করা যায়। [C. U. B. Com]

25. ছয়মাস অন্তর চক্রবৃদ্ধি স্থদ গণনা করা হইবে, এই শর্তে কোন প্রতিষ্ঠান বার্ষিক 3% হারে 10,000 টাকা ঋণ গ্রহণ করিল। স্থির হইল যে, 24টি অর্ধবার্ষিক কিস্তিতে স্থদসহ দেনা শোধ করা হইবে এবং প্রথম 23টি কিস্তির প্রতিটির পরিমাণ হইবে 500 টাকা। দ্বাদশ বৎসর অন্তে 24-তম কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

———

দ্বাদশ অধ্যায়

সূচক ও লগারিদ্‌ম্ শ্রেণী

(Exponential and Logarithmic Series)

A. সূচক শ্রেণী

12·1. সংজ্ঞা ঃ

$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{r!}+\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত

শ্রেণীটিকে সাধারণতঃ e-অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়।

12·2. e-এর ধর্মাবলী ঃ

(i) e-এর মান সসীম এবং ইহা 2 ও 3-এর মধ্যে অবস্থিত।

সংজ্ঞা হইতে, $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots$

$$=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots \qquad (1)$$

$$\therefore \quad e>2.$$

আবার, $\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$.

$3!=3.2.1>2.2.1. \quad \therefore \quad 3!>2^2. \quad \therefore \quad \frac{1}{3!}>\frac{1}{2^2}$.

অনুরূপভাবে, $\frac{1}{4!}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3!}<\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^2}<\frac{1}{2^3}$,

$\frac{1}{5!}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4!}<\frac{1}{2^4}$, ইত্যাদি।

সুতরাং (1) হইতে, $e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots$$

$<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ অর্থাৎ $<1+2$ অর্থাৎ <3.

$$\therefore \quad 2<e<3,$$

অর্থাৎ e-এর মান 2 ও 3-এর মধ্যে অবস্থিত এবং সেজন্য e-এর মান সসীম।

(ii) **e-একটি অমেয় (incommensurable) রাশি।-**

যদি সম্ভব হয়, মনে কর, e একটি প্রমেয় (commensurable) অর্থাৎ মূলদ রাশি এবং উহা $\frac{p}{q}$-এর সমান, যেখানে p এবং q দুইটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$

($\because 2 < e < 3$).

$$\therefore \frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \cdots\cdots$$

উভয় পক্ষকে $q!$ দ্বারা গুণ করিলে,

$$p(q-1)! = \left(2.q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots\cdots + 1\right)$$
$$+ \left\{\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots\cdots\right\}.$$

যেহেতু বামপক্ষ একটি পূর্ণসংখ্যা এবং ডান দিকের প্রথম বন্ধনীর অন্তর্গত শ্রেণীটির প্রত্যেকটি পদই পূর্ণসংখ্যা, সুতরাং দ্বিতীয় বন্ধনীর অন্তর্গত

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots\cdots = \text{একটি পূর্ণসংখ্যা।} \qquad \cdots \quad (2)$$

(2)-এর শ্রেণীটির প্রত্যেকটি পদ ধনাত্মক বলিয়া, উহাদের সমষ্টি $\frac{1}{q+1}$ অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \cdots\cdots$

অর্থাৎ $\left(\frac{1}{q+1}\right) \Big/ \left(1 - \frac{1}{q+1}\right)$, অর্থাৎ $\frac{1}{q}$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

সুতরাং (2)-এর শ্রেণীটি $\frac{1}{q+1}$ ও $\frac{1}{q}$-এর মধ্যে অবস্থিত অর্থাৎ উহা কোন পূর্ণসংখ্যা নয়, উহা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ ; কিন্তু প্রমাণিত হইয়াছে যে, উহা একটি পূর্ণসংখ্যা। ইহা অসম্ভব। সুতরাং আমাদের কল্পনা, e একটি প্রমেয় রাশি, ঠিক নহে।

$\therefore$ e একটি অমেয় রাশি।

টীকা : সাত দশমিক স্থান পর্যন্ত e-এর আসন্ন মান 2·7182818

এবং $\frac{1}{e} = 0 \cdot 36787944$.

12·3. e^x-এর বিস্তৃতি :

x-এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots\cdots \text{অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।}$$

প্রমাণ ঃ $n>1$ হইলে অর্থাৎ $\frac{1}{n}<1$ হইলে, দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+nx.\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots \text{অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত}$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots\cdots \text{অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।}$$

n ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইয়া অনন্তের দিকে অগ্রসর হইলে, $\frac{1}{n}$ ক্রমশঃ হ্রাস পাইবে ও অবশেষে শূন্যের দিকে অগ্রসর হইবে এবং এই অবস্থায় $\frac{1}{n}$-কে ত্যাগ করা যাইবে।

$$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

সুতরাং n অনন্তের দিকে অগ্রসর হইলে (1)-এ $x=1$ বসাইলে,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots=e.$$

$$\therefore \quad e^x=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}.$$

অতএব (1) হইতে, n-কে অনন্তের দিকে অগ্রসর করাইয়া, পাওয়া যায়,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots \quad \text{অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।}$$

ইহাই **সূচক শ্রেণী** নামে পরিচিত।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ x-এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য,

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^r\frac{x^r}{r!}+\cdots \text{অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।}$$

টীকা 1. e-এর সংজ্ঞা নিম্নলিখিতরূপেও দেওয়া যায়

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

টীকা 2 ঃ x-এর সমুদয় সসীম মানের জন্যই সূচক শ্রেণী অভিসারী, কারণ, x-এর সসীম মানের জন্য শ্রেণীটির $\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{x}{n}\to 0\ (<1)$, যখন $n\to\infty$.

12·4. a^x-এর বিস্তৃতি ঃ

x-এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য এবং যদি a ধনাত্মক হয়,

$$a^x = 1 + \frac{x}{1!}(\log_e a) + \frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2 + \cdots + \frac{x^r}{r!}(\log_e a)^r + \cdots\cdots$$ **অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।**

মনে কর, $a^x = e^y$.

$\therefore \quad y = x \log_e a.$

স্থতরাং $a^x = e^y = e^{x \log_e a}$

$$= 1 + \frac{x \log_e a}{1!} + \frac{(x \log_e a)^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{(x \log_e a)^r}{r!} + \cdots\cdots$$ অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত

$$= 1 + \frac{x}{1!}(\log_e a) + \frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2 + \cdots\cdots + \frac{x^r}{r!}(\log_e a) + \cdots\cdots$$ অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

ইহা **সূচক উপপাদ্য** নামে পরিচিত।

12·5. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. দেখাও যে, $1 + \frac{1+2}{2!} + \frac{1+2+2^2}{3!} + \cdots\cdots = e^2 - e.$

বামপক্ষের শ্রেণীটির n-তম পদ $t_n = \frac{1+2+2^2+\cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}}{n!}$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \frac{2^n - 1}{2-1} = \frac{1}{n!}(2^n - 1).$$

n-এর পরিবর্তে 1, 2, 3, 4,……বসাইলে, পাওয়া যায়,

$$t_1 = \frac{1}{1!}(2^1 - 1),$$

$$t_2 = \frac{1}{2!}(2^2 - 1),$$

$$t_3 = \frac{1}{3!}(2^3 - 1),$$

$$t_4 = \frac{1}{4!}(2^4 - 1),$$

… …

… …

যোগ করিলে,

$$\text{প্রদত্ত শ্রেণী} = \left(\frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \cdots\cdots\right) - \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\cdots\right)$$

$$= (e^2 - 1) - (e - 1) = e^2 - e.$$

উদাহরণ 2. মান নির্ণয় কর :

$$\frac{1}{2\,!}+\frac{1+2}{3\,!}+\frac{1+2+3}{4\,!}+\cdots\cdots$$

প্রদত্ত শ্রেণীটির n-তম পদ $t_n=\dfrac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{(n+1)\,!}$

$$=\frac{n(n+1)}{2(n+1)\,!}=\frac{n}{2.n\,!}=\frac{1}{2(n-1)\,!}.$$

n-এর পরিবর্তে 1, 2, 3, 4,⋯⋯বসাইলে,

$$t_1=\frac{1}{2},\qquad t_2=\frac{1}{2}.\ \frac{1}{1\,!}$$

$$t_3=\frac{1}{2}.\ \frac{1}{2\,!},\qquad t_4=\frac{1}{2}.\ \frac{1}{3\,!},\cdots\cdots$$

যোগ করিলে,

প্রদত্ত শ্রেণী $=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{1\,!}+\dfrac{1}{2\,!}+\dfrac{1}{3\,!}+\cdots\cdots\right)=\dfrac{1}{2}e.$

উদাহরণ 3. $\dfrac{1.2}{1\,!}+\dfrac{2.3}{2\,!}+\dfrac{3\,4}{3\,!}+\cdots\cdots$ অসীম শ্রেণীটির সমষ্টি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত শ্রেণীটির n-তম পদ $t_n=\dfrac{n(n+1)}{n\,!}=\dfrac{n+1}{(n-1)\,!}=\dfrac{(n-1)+2}{(n-1)\,!}$

$$=\frac{1}{(n-2)\,!}+\frac{2}{(n-1)\,!}.$$

শ্রেণীটিকে পরীক্ষা করিলে পাওয়া যায়, $t_1=0+2.1,$

$$t_2=1+2.\ \frac{1}{1\,!}.$$

t_n-এ n-এর পরিবর্তে 3,4,⋯⋯বসাইলে পাওয়া যায়, $t_3=\dfrac{1}{1\,!}+2.\dfrac{1}{2\,!},$

$$t_4=\frac{1}{2\,!}+2.\frac{1}{3\,!},$$

$$\cdots\qquad\cdots$$

যোগ করিয়া পাই,

প্রদত্ত শ্রেণী $=\left(1+\dfrac{1}{1\,!}+\dfrac{1}{2\,!}+\cdots\cdots\right)+2\left(1+\dfrac{1}{1\,!}+\dfrac{1}{2\,!}+\dfrac{1}{3\,!}+\cdots\cdots\right)$

$$=e+2e=3e.$$

উদাহরণ 4. $\dfrac{1+x+x^2}{e^x}$-এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগ নির্ণয় কর।

$$\frac{1+x+x^2}{e^x}=(1+x+x^2)e^{-x}$$

$$=(1+x+x^2)\left\{1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots\cdots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots\right\}.$$

সুতরাং $x^n(n>1)$-এর সহগ

$$=(-1)^n.\frac{1}{n!}+(-1)^{n-1}.\frac{1}{(n-1)!}+(-1)^{n-2}.\frac{1}{(n-2)!}$$

$$=(-1)^n.\frac{1}{n!}\{1-n+n(n-1)\}=(-1)^n.\frac{1}{n!}(n-1)^2.$$

উদাহরণ 5. আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e}}$-এর মান নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e}}=e^{-\frac{1}{5}}=1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2!}.\dfrac{1}{5^2}-\dfrac{1}{3!}.\dfrac{1}{5^3}+\dfrac{1}{4!}.\dfrac{1}{5^4}-\cdots\cdots$

$$=1-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{50}-\tfrac{1}{750}+\tfrac{1}{15000}-\cdots\cdots$$

$$=1-{}^{\cdot}2+{}^{\cdot}02-{}^{\cdot}00133+{}^{\cdot}00007-\cdots\cdots$$

$={}^{\cdot}819$ (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান)।

উদাহরণ 6. e^{e^x}-কে x-এর ঊর্ধ্বক্রমঘাতে বিস্তার কর এবং x^r-এর সহগ নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $e^{e^x}=1+e^x+\dfrac{e^{2x}}{2!}+\dfrac{e^{3x}}{3!}+\cdots\cdots$

$$=1+\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(1+2x+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^3x^3}{3!}+\cdots\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1+3x+\frac{3^2x^2}{2!}+\frac{3^3x^3}{3!}+\cdots\cdots\right)+\cdots\cdots$$

$$=\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\right)+\left(1+\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}+\cdots\cdots\right)x$$

$$+\frac{1}{2!}\left(1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\cdots\right)x^2+\frac{1}{3!}\left(1+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\cdots\cdots\right)x^3+\cdots\cdots$$

সুতরাং x^r-এর সহগ $=\dfrac{1}{r!}\left(1+\dfrac{2^r}{2!}+\dfrac{3^r}{3!}+\cdots\cdots\right).$

প্রশ্নমালা XII(A)

প্রমাণ কর (1—7) :

1. $\frac{2}{1!}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+\cdots\cdots=e.$ 2. $\frac{2}{3!}+\frac{4}{5!}+\frac{6}{7!}+\cdots\cdots=\frac{1}{e}.$

3. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots\cdots=1.$

4. $1+\frac{1+2}{2!}+\frac{1+2+3}{3!}+\cdots\cdots=\frac{3}{2}e.$ [W.B.B.H.S.]

5. $1+\frac{1+x}{2!}+\frac{1+x+x^2}{3!}+\cdots\cdots=\frac{e-e^x}{1-x}.$

6.(a) $\left\{1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots\right\}^2-\left\{x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots\right\}^2=1.$

(b) $\left\{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots\right\}^2+\left\{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots\right\}^2=1.$

7. $1+\log_e x+\frac{(\log_e x)^2}{2!}+\frac{(\log_e x)^3}{3!}+\cdots\cdots=x.$

8. x-এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য, দেখাও যে, $\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$-এর বিস্তৃতির প্রত্যেকটি পদই বাস্তব।

মান নির্ণয় কর (9—16) :

9. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots$ 10. $1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\cdots$

11. $1+\frac{3}{1!}+\frac{5}{2!}+\frac{7}{3!}+\cdots\cdots$ 12. $\frac{1^2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\cdots\cdots$

13. $\frac{1^3}{1!}+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\cdots\cdots$ 14. $\frac{1^4}{1!}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\cdots\cdots$

15. $\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\cdots\right)\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\cdots\right)^{-1}.$

16. $\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\cdots\right)^{-1}.$

নিম্নলিখিত অসীম শ্রেণীগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর (17—22) :

17. (a) $1+\frac{1}{2!}+\frac{1.3}{4!}+\frac{1.3.5}{6!}+\cdots$ (b) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.2.3.5}+\frac{1}{1.2.3.4.5.7}+\cdots$

18. $\frac{1}{1!}+\frac{6}{2!}+\frac{13}{3!}+\frac{22}{4!}+\frac{33}{5!}+\frac{46}{6!}+\cdots\cdots$

19. $2+\frac{4}{1!}+\frac{6}{2!}+\frac{8}{3!}+\frac{10}{4!}+\cdots\cdots$

20. (a) $\frac{4}{1!}+\frac{10}{2!}+\frac{18}{3!}+\frac{28}{4!}+\cdots\cdots$ (b) $\frac{3^2}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\frac{5^2}{3!}+\cdots\cdots$

21. $\frac{1^2.2^2}{1!}+\frac{2^2.3^2}{2!}+\frac{3^2.4^2}{3!}+\cdots\cdots$

22. $(1+2)\log_e 2$ [illegible] $\frac{2^2}{2}$ [illegible] $\frac{1+2^3}{3!}(\log_e 2)^3+\cdots\cdots$

2[illegible] [illegible] $\frac{\ldots+x^2}{e^x}$ [illegible] (ii) $\frac{1+ax-x^2}{e^x}$-এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগ নির্ণয় কর।

24. আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত e এবং $\frac{1}{e}$-এর মান নির্ণয় কর।

25. (a) x-এর ঊর্ধ্বক্রম ঘাতে তিনটি পদ পর্যন্ত বিস্তার কর ঃ

(i) $\frac{x}{e^x-1}$. (ii) $\left(2+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\right)^2$.

(b) $\frac{e^{5x}+e^x}{e^{3x}}$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

B. লগারিদ্‌ম্ শ্রেণী

12·6. $\log_e(1+x)$-এর বিস্তৃতি ঃ

$-1 < x \leqslant 1$ হইলে,

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{x^r}{r}+\cdots\cdots$$ অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

প্রমাণ ঃ সূচক উপপাদ্য হইতে, a এবং y-এর সমুদয় সসীম মানের জন্য,

$$a^y=1+y\log_e a+\frac{y^2}{2!}(\log_e a)^2+\frac{y^3}{3!}(\log_e a)^3+\cdots\cdots$$

উভয়পক্ষে $a=(1+x)$ বসাইলে,

$$(1+x)^y=1+y\log_e(1+x)+\frac{y^2}{2!}\{\log_e(1+x)\}^2+\frac{y^3}{3!}\{\log_e(1+x)\}^3+\cdots(1)$$

আবার, দ্বিপদ উপপাদ্য হইতে, x-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, y-এর সমুদয় সসীম মানের জন্য,

$$(1+x)^y=1+yx+\frac{y(y-1)}{2!}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{3!}x^3+\frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{4!}x^4+\cdots\cdots(2)$$

$\therefore$ x-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে (1) ও (2) হইতে নিম্নের অভেদটি পাওয়া যায়ঃ

$$1+y\ \log_e(1+x)+\frac{y^2}{2\,!}\{\log_e(1+x)\}^2+\frac{y^3}{3\,!}\{\log_e(1+x)\}^3+\cdots\cdots$$

$$=1+yx+\frac{y(y-1)}{2\,!}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{3\,!}x^3$$

$$+\frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{4\,!}x^4+\cdots\cdots$$

এই অভেদটির উভয়পক্ষ হইতে y-এর সহগের সমতা করিলে, পাওয়া যায়,

$$\log_e(1+x)=x+\frac{(-1)}{2\,!}x^2+\frac{(-1)(-2)}{3\,!}x^3+\frac{(-1)(-2)(-3)}{4\,!}x^4+\cdots$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots \text{ অসীম পর্যন্ত,}$$

যদি x-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়।

ইহাই **লগারিদম্ শ্রেণী** নামে পরিচিত।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ x-এর পরিবর্তে $-x$ লিখিলে পাওয়া যায়, $-1\leqslant x<1$ মানের জন্য,

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots-\frac{x^r}{r}-\cdots\cdots\text{অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।}$$

টীকা 1. $x=1$ হইলেও $\log\ (1+x)$-এর বিস্তৃতির সত্যতা বজায় থাকে।

$\therefore\ \log_e 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots.$

টীকা 2. $|x|\leqslant 1$ মানের জন্য লগারিদম্ শ্রেণী অভিসারী, কারণ, $|x|<1$ মানের জন্য শ্রেণীটির $\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{n}{n+1}x$; যখন n অনন্ত হইবে, ইহার সীমাস্থমান$=x$ (<1), এবং $x=1$ হইলে, পাওয়া যায় $\log_e 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$; এই শ্রেণীটিও অভিসারী।

12·7. লগারিদম্ শ্রেণী হইতে কতিপয় সিদ্ধান্ত ঃ

$|x|<1$ হইলে,

$$\log_e\ (1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots \quad\cdots\ (1)$$

এবং $\log_e\ (1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots \quad\cdots\ (2)$

বিয়োগ করিয়া পাওয়া যায়,

$$\log_e\ (1+x)-\log_e\ (1-x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right)$$

অথবা, $\log_e \left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right), (-1<x<1).$

$\frac{1+x}{1-x}$-এর পরিবর্তে a লিখিলে অর্থাৎ $x=\frac{a-1}{a+1}$ লিখিলে,

$$\log_e a=2\left\{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5+\cdots\cdots\right\} \quad \cdots \quad (3)$$

(3)-এ, a-এর পরিবর্তে $\frac{m+1}{m}$ লিখিলে, অর্থাৎ $\frac{a-1}{a+1}=\frac{1}{2m+1}$ লিখিলে,

$$\log_e \frac{m+1}{m}=\log_e (m+1)-\log_e m$$

$$=2\left\{\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2m+1)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2m+1)^5}+\cdots\cdots\right\} \quad \cdots \quad (4)$$

(1) ও (2)-এ, x-এর পরিবর্তে $\frac{1}{m}$ বসাইলে, পাওয়া যায়, (যখন $m>1$),

$$\log_e \frac{m+1}{m}=\log_e (m+1)-\log_e m=\frac{1}{m}-\frac{1}{2m^2}+\frac{1}{3m^3}-\cdots\cdots \quad (5)$$

$$\log_e \frac{m}{m-1}=\log_e m-\log_e (m-1)=\frac{1}{m}+\frac{1}{2m^2}+\frac{1}{3m^3}+\cdots\cdots \quad (6)$$

(5) ও (6) যোগ করিলে,

$$\log_e (m+1)-\log_e (m-1)=2\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{3m^3}+\frac{1}{5m^5}+\cdots\cdots\right\} \quad \cdots \quad (7)$$

টীকা : 1 অপেক্ষা বৃহত্তর ছোট রাশির লগারিদম্ নির্ণয় করিতে হইলে (3) শ্রেণী ব্যবহার করা হয়। পরপর দুইটি রাশির একটির লগারিদম্ জানা থাকিলে অপরটির লগারিদম্ নির্ণয়ের জন্য (4) শ্রেণী ব্যবহার করা হয়। যেমন, (4)-এ $m=1$ বসাইলে,

$$\log_e 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\cdots\right)$$

$$=2(\cdot33333+\tfrac{1}{3}\times\cdot03704+\tfrac{1}{5}\times\cdot00412+\tfrac{1}{7}\times\cdot00046+\cdots\cdots)$$

$$=\cdot6931 \text{ (আসন্ন)।}$$

অনুরূপভাবে, $\log_e 3-\log_e 2=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\cdots\cdots\right)$

$$=\cdot4055 \text{ (আসন্ন)।}$$

$\therefore\ \log_e 3=\cdot6931+\cdot4055=1\cdot0986.$

এইভাবে অগ্রসর হইয়া e-এর নিধানে যে-কোন রাশির লগারিদম্ পাওয়া যাইবে।

সাধারণ লগারিদমের নিধান 10 এবং এই লগারিদমের নিধান e. সুতরাং ইহা সাধারণ লগারিদম্ হইতে ভিন্ন। এই লগারিদম্‌কে নেপিরিয়ান (Napierian) লগারিদম্ বলে। N একটি ধনাত্মক সংখ্যা হইলে, আমরা জানি,

$$\log_{10} N = \log_e N \times \log_{10} e = \log_e N \times \frac{1}{\log_e 10}.$$

সুতরাং নেপিরিয়ান লগারিদম্‌কে $\frac{1}{\log_e 10}$ দ্বারা গুণ করিলে সাধারণ লগারিদমে **পরিণত** হয়। এই $\frac{1}{\log_e 10}$-কে সাধারণ লগারিদম্ প্রণালীর **মডিউলাস্** বলে।

ইহার মান $\frac{1}{2\cdot302585\ldots} = 0\cdot434294\ldots$

সাধারণতঃ এই মডিউলাসকে μ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং (5), (6) ও (7) হইতে,

$$\log_{10} \frac{m+1}{m} = \mu\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{3m^3} - \ldots\ldots\right),$$

$$\log_{10} \frac{m-1}{m} = \mu\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{3m^3} + \ldots\ldots\right),$$

$$\log_{10} \frac{m+1}{m-1} = 2\mu\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{5m^5} + \ldots\ldots\right).$$

ইহাদের সাহায্যে 10-এর নিধানে যে-কোন রাশির লগারিদম্ নির্ণয় করা যায়।

12·8. উদাহরণাবলী ঃ

উদাহরণ 1. $a > b$ হইলে, দেখাও যে,

$$\log_e\left(\frac{a}{b}\right) = 2\left\{\frac{a-b}{a+b} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^5 + \ldots\ldots\right\}$$

আমরা জানি, $-1 < x < 1$ হইলে,

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots$$

এবং $\log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots$

বিয়োগ করিয়া,

$$\log_e(1+x) - \log_e(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\right).$$

অথবা, $\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right), (-1<x<1)$

x-এর পরিবর্তে $\frac{a-b}{a+b}$, $(a>b)$ লিখিলে অর্থাৎ $\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{b}$ লিখিলে,

$$\log_e\left(\frac{a}{b}\right)=2\left\{\frac{a-b}{a+b}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^5+\cdots\cdots\right\}.$$

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $\log_e 2=\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\cdots\cdots$

আমরা জানি,

$$\log_e 2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}+\cdots\cdots$$

$$=(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6})+(\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8})+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{7.8}+\cdots\cdots \quad \cdots \quad (1)$$

আবার, $\log_e 2=1-(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})-(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5})-(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{7})-\cdots\cdots$

$$=1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{4.5}-\frac{1}{6.7}-\cdots\cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) ও (2) যোগ করিলে,

$$2\log_e 2=1+\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)+\left(\frac{1}{5.6}-\frac{1}{6.7}\right)+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{3-1}{1.2.3}+\frac{5-3}{3.4.5}+\frac{7-5}{5.6.7}+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{3.4.5}+\frac{2}{5.6.7}+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \log_e 2=\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\cdots\cdots$$

উদাহরণ 3. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}-\frac{1}{4.2^4}+\cdots\cdots$ অসীম শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় কর।

প্রদত্ত শ্রেণীটিকে সাজাইয়া লিখিলে,

$$\tfrac{1}{2}-\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}+\frac{(\frac{1}{2})^3}{3}-\frac{(\frac{1}{2})^4}{4}+\cdots\cdots$$

$$=\log_e(1+\tfrac{1}{2})=\log_e\tfrac{3}{2}.$$

উদাহরণ 4. $y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots\cdots$ এবং $|x|<1$ হইলে, দেখাও যে, $x=y-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}-\frac{y^4}{4!}+\cdots\cdots$ [B.U.Ent.]

এক্ষণে, $-y=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\cdots=\log_e(1-x)$.

$\therefore\quad 1-x=e^{-y}$

অথবা, $x=1-e^{-y}=1-\left(1-y+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}-\cdots\cdots\right)$

$$=y-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}-\frac{y^4}{4!}+\cdots\cdots$$

উদাহরণ 5. $\log_e(1+x+x^2)$-এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগ নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$\log_e(1+x+x^2)=\log_e\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)=\log_e(1-x^3)-\log_e(1-x)$$

$$=\left(-x^3-\frac{x^6}{2}-\frac{x^9}{3}-\cdots\cdots-\frac{x^{3r}}{r}-\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{x^r}{r}+\cdots\cdots\right)\right.$$

n যদি 3-এর গুণিতক না হয়, তবে x^n শুধু দ্বিতীয় শ্রেণীটিতে থাকিবে এবং x^n-এর সহগ হইবে $\frac{1}{n}$. যদি n, 3-এর গুণিতক হয়, তাহা হইলে x^n-এর সহগ হইবে $-\frac{1}{n/3}+\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{3}{n}=-\frac{2}{n}$.

উদাহরণ 6. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α, β হইলে, দেখাও যে, $\log_e(a-bx+cx^2)=\log_e a+(\alpha+\beta)x-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)x^2+\frac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)x^3-\cdots$

$ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β.

$\therefore\quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

$$\therefore\quad a-bx+cx^2=a\left(1-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x^2\right)=a\{1+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2\}$$

$$=a(1+\alpha x)(1+\beta x).$$

$$\therefore\quad \log_e(a-bx+cx^2)=\log_e a+\log_e(1+\alpha x)+\log_e(1+\beta x)$$

$$=\log_e a+\left(\alpha x-\frac{\alpha^2x^2}{2}+\frac{\alpha^3x^3}{3}-\cdots\cdots\right)+\left(\beta x-\frac{\beta^2x^2}{2}+\frac{\beta^3x^3}{3}-\cdots\cdots\right)$$

$$=\log_e a+(\alpha+\beta)x-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)x^2+\frac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)x^3-\cdots\cdots.$$

প্রশ্নমালা XII (B)

প্রমাণ কর (**1—8**) :

1. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}+\cdots\cdots=\log_e 2.$

2. $1+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\cdots\cdots=2\log_e 2.$

3. $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\cdots\cdots=\log_e\left(\frac{5}{4}\right).$

4. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)-\cdots\cdots=\log_e\sqrt{2}.$

5. $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}\right)+\cdots=\log_e\sqrt{2}.$ [B.U.Ent.]

6. $\log_e\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}=\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{5n^5}+\cdots\cdots$

7. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\cdots\cdots=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\cdots$

8. $\log_e\{(1+x)^{1+x}.(1-x)^{1-x}\}=2\left\{\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^6}{5.6}+\cdots\cdots\right\}.$

অসীম শ্রেণীগুলির **(9—12)** যোগফল নির্ণয় কর :

9. $1+\frac{1}{3.2^2}+\frac{1}{5.2^4}+\frac{1}{7.2^6}+\cdots\cdots$

10. $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\cdots\cdots$

11. $\frac{5}{1.2.3}+\frac{7}{3.4.5}+\frac{9}{5.6.7}+\cdots\cdots$

12. $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^3}-\frac{1}{2^3}\right)+\cdots\cdots$

মান নির্ণয় কর (**13—16**) :

13. $\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\cdots\cdots(x<1).$

14. $\frac{x^2}{2.3}+\frac{2x^3}{3.4}+\frac{3x^4}{4.5}+\frac{4x^5}{5.6}+\cdots\cdots(x<1).$

15. $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{8^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4^5}+\frac{1}{6^5}+\frac{1}{8^5}\right)+\cdots\cdots$

16. $1-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2.3(n+1)^2}-\frac{1}{3.4(n+1)^3}-\frac{1}{4.5(n+1)^4}-\cdots\cdots$

17. x-এর ঊর্ধক্রম ঘাতে পাঁচটি পদ পর্যন্ত $\log_e\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

18. x-এর ঊর্ধক্রম ঘাতে $\log_e(1+x+x^2+x^3)$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর এবং x^{2n} ও x^{2n+1}-এর সহগ নির্ণয় কর।

19. $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α, β হইলে, দেখাও যে, $\log_e(1+px+qx^2)=(\alpha+\beta)x-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)x^2+\frac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)x^3-\cdots\cdots$

20. $y=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\cdots$ এবং $|x|<1$ হইলে, দেখাও যে,

$$x=y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots$$ [H. S. 1978]

21. a, b, c বিপরীত শ্রেণীতে থাকিলে এবং $a>b>c$ হইলে, দেখাও যে,
$$\left(\frac{c}{a}-\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{c^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}\right)+\cdots\cdots=\log_e\frac{b}{c}.$$

22. $x^2y=2x-y$ এবং $x<1$ হইলে, দেখাও যে,
$$y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots\cdots=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right).$$

23. x-এর সাংখ্যমান এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{3}{4}x^4+\tfrac{4}{5}x^5+\cdots\cdots=\frac{x}{1-x}+\log(1-x).$$

24. x-এর ঊর্ধক্রম ঘাতে $\log_e(1-x+x^2)$-কে $a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$ আকারে বিস্তার করিলে, দেখাও যে, $a_3+a_6+a_9+\cdots\cdots=\frac{2}{3}\log_e 2$.

25. $x^2<1$ হইলে, দেখাও যে,
$$\log_e(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots)$$
$$=2(x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\cdots\cdots+\frac{1}{n}x^n+\cdots\cdots).$$

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা I

1. $\dfrac{\sqrt[5]{y^4}}{\sqrt[3]{x^2}}$. 2. $x^{2^n} - y^{2^n}$.

3. $a^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{4}} - 1 + 2a^{-\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{2}} + a^{-\frac{3}{4}}$.

4. $x + xy^{-1} + y + xy^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$.

5. $\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$, অথবা, $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$.

6. $\sqrt[48]{2}$; 1. **13.** (i) $\sqrt[3]{abc}$. (ii) 6. (iii) $(a^4 - b^4)^m$. (iv) $\frac{1}{4}$.

14. (*a*) $\left(\dfrac{p}{q}\right)^{m+n}$. (*b*) 1. (*c*) 8. **15.** 1. **16.** $p = q^{\frac{2}{2q-1}}$.

21. $x=3$. **22.** $x=1$ বা 2. **23.** (i) $x=5, y=3$. (ii) $x=3, y=2$.

24. $x=\frac{9}{4}, y=\frac{27}{8}$. **25.** (i) $x=2, -\frac{2}{3}$; $y=1, -\frac{1}{3}$. (ii) $x=y=z=1$.

প্রশ্নমালা II

1. (i) $\sqrt{45}$. (ii) $\sqrt[3]{48}$. (iii) $\sqrt[n]{a^n b}$.

2. (i) $4\sqrt{2}$. (ii) $4\sqrt[3]{6}$. (iii) $2\sqrt[5]{28}$.

3. $\sqrt{\frac{4}{9}}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$. **4.** (i) $\sqrt[6]{64}, \sqrt[6]{8}, \sqrt[6]{9}$. (ii) $2\sqrt[12]{729}, \sqrt[12]{256}, \sqrt[12]{125}$.

5. (i) $\sqrt{5}$. (ii) $\sqrt[3]{4}$. **6.** (*a*) (i) $3, 2\sqrt{2}, \sqrt[3]{10}$. (ii) $\sqrt[4]{36}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[6]{80}$.

(*b*) (i) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{8}$. (ii) $\sqrt[5]{12}, \sqrt[4]{8}, \sqrt[3]{5}$.

7. (i) $25\sqrt{2}$. (ii) $12\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$. **8.** (i) $\sqrt{3}$. (ii) $\sqrt[3]{3}$.

9. (i) $3\sqrt{15} + \sqrt{10} - 6\sqrt{6} - 4$. (ii) $a\sqrt{a+b} + a^2 - b + \sqrt{ab+b^2}$.

10. (i) $\sqrt{3}$. (ii) $\frac{1}{4}(9 + \sqrt{5})$.

11. (i) $17 + 4\sqrt{15}$. (ii) $2(a + \sqrt{a^2 - b^2})$. (iii) $2(2x - \sqrt{4x^2 - 9})$.

12. (i) $7 + 5\sqrt{2}$. (ii) $5 - 12\sqrt[3]{3} + 6\sqrt[3]{9}$.

13. (i) $\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$.

(ii) $(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a})(\sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})$.

(iii) $9\sqrt{3} - 9\sqrt[3]{2} + 3\sqrt{3}.\sqrt[3]{4} - 6 + 2\sqrt{3}\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}$. (iv) $\sqrt[3]{3} + 1$.

14. (i) $\dfrac{2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{1}$. (ii) $\dfrac{a + x + \sqrt{ax + x^2}}{a}$.

(iii) $\dfrac{(3 - \sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt[4]{2} + 1)}{1}$. (iv) $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2}$.

(v) $\dfrac{1 - \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}}{2}$.

15.(i) $\pm(\sqrt{5}+\sqrt{3})$. (ii) $\pm(3+2\sqrt{2})$. (iii) $\pm(\sqrt{15}+\sqrt{3})$.
(iv) $\pm(3\sqrt{3}-1)$. (v) $\pm(2\sqrt{7}-\sqrt{5})$. (vi) $\pm\frac{1}{3}(\sqrt{3}+1)$.
(vii) $\pm\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1)$. (viii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2a+b}+\sqrt{b})$.
(ix) $\pm(\sqrt{x+y}+\sqrt{z})$. (x) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})$.
(xi) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2})$. (xii) $\pm(\sqrt{6}-2)$.
(xiii) $\pm(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})$. (xiv) $\pm(1+\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}})$.
(xv) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{p-q}+\sqrt{q-r}+\sqrt{r-p})$.
16. (i) ·27. (ii) 10·20. (iii) 2·62.
17.(i) $2a$. (ii) $4x\sqrt{x^2-1}$. (iii) $\frac{2}{3}$. (iv) $\sqrt{3}$. (v) 0.
(vi) 0. (vii) 0. (viii) $2+\sqrt{3}$. (ix) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
(x) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (xi) 0. (xii) $\sqrt{2}$.
18. $1, \frac{3}{2}\sqrt{3}$. 19.(i) $1\frac{2}{97}$, 289. 20. $\pm 2\sqrt{3}$. 23.(i) a.
24.(i) 0. 25.(a) (i) $\sqrt{7}+1$. (ii) $1-\sqrt{2}$. (iii) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

প্রশ্নমালা III

1. $-6-14\sqrt{6},\ 4-3\sqrt{6}i$. 2. $\frac{2+\sqrt{-3}}{7}, \frac{18+i}{13}$.
3.(i) $20+i(-35)$. (ii) $-26+i(18)$. (iii) $\frac{2}{5}+i(\frac{29}{5})$.
(iv) $0+\frac{4abi}{a^2+b^2}$. (v) $\frac{1}{2}(1+i\cot\frac{1}{2}\theta)$.
(vi) $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2-2x+1} - i\frac{2y}{x^2+y^2-2x+1}$.
4.(i) 13, $\tan^{-1}\frac{12}{5}$. (ii) $2, \frac{2}{3}\pi$. (iii) $1, -\beta$.
(iv) $\frac{1}{5}\sqrt{10}, \tan^{-1}(-3)$. (v) $1, \frac{1}{2}\pi$. (vi) $2, -\frac{1}{2}\pi$.
5.(i) $-\frac{1}{25}(2+11i)$. (ii) $7-4i$.
6.(i) $\pm\{\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)}+i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)}\}$. (ii) $\pm(1-4i)$.
(iii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$. (iv) $\pm(a-i)$.
(v) $\pm[\sqrt{\frac{1}{2}\{\sqrt{(2+x^8-2x^4)}+1\}}-i\sqrt{^1\{\sqrt{(2+x^8-2x^4)}-1\}}]$.
(vi) $\pm\{(a+b)-i(a-b)\}$. (vii) $\pm(x-\frac{1}{x}+2i)$.
(viii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3x+1}+i\sqrt{x-3})$.

7. (i) $-3+5i$. (ii) $2-i$. 8. $\pm(3+2i), \pm(2-3i)$.

9. (i) 0. (ii) i. (iii) $2i$. (iv) $\frac{11}{4}$. 10. 1.

11. (a) -234. (b) $-\frac{9}{46}i$, $-\frac{8}{23}$. 12. $2(\cos \frac{1}{3}\pi+i \sin \frac{1}{3}\pi)$.

13. $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{11})$. 16. $\frac{4}{7}, -\frac{1}{14}\sqrt{6}$.

22. $\sqrt{13}, 2\sqrt{13}, 3\sqrt{13}$; $\tan^{-1}\frac{2}{3}$. 23. $-1, \frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$.

24. (i) $(1+ix)(1-ix)$. (ii) $(a+\omega b)(a+\omega^2 b)$.

(iii) $(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$. (iv) $(l-m)(l-\omega m)(l-\omega^2 m)$.

প্রশ্নমালা IV

1. 9. 2. $A=9BC$.

3. k_1, k_2, k_3 তিনটি ভেদধ্রুবক হইলে,

i) $k_1 k_2 k_3=1$. (ii) $\frac{k_1}{k_1+1}+\frac{k_2}{k_2+1}+\frac{k_3}{k_3+1}=1$.

9. $48\frac{1}{2}$. 10. 346·5 বর্গ সে. মি.। 11. 55 টাকা।

12. 100,000 টাকা। 13. 6 সে. মি. 14. 1625 টাকা।

15. 784 ফুট, 144 ফুট। 16. (i) $20\frac{1}{4}$ ফুট। (ii) 32 সে. মি.।

17. $8(\sqrt{2}-1)$ সে.মি.। 18. 144. 19. $14\frac{5}{24}$ বর্গ সে. মি.।

20. 7 মিটার। 21. 45 বর্গ সে.মি.। 22. (i) $287\frac{223}{256}$ কি.গ্রা. (ii) 108 : 25.

23. 4. 24. $3754\frac{2}{3}$ অ্যাম্পিয়ার। 25. (i) 20 জন। (ii) $5\frac{2}{5}$ দিন।

প্রশ্নমালা V(A)

1. (a) $-12, -20, 14-2n$. (b) $n+\frac{1}{n}-1, 2-\frac{1}{n}$. 2. 20-তম।

3. না। 4. 34. 5. 17টি। 6. 3.

7. (i) -33. (ii) $-1, 3, 7, \cdots\cdots$; 71. 8. $3, 5, 7, \cdots\cdots$; 47.

9. (ii) $\frac{d(p-1)-c(q-1)}{p-q}, \frac{c-d}{p-q}$. 10. $m+n-p$.

11. $1, 5, 9, \cdots\cdots$; 117. 13. (i) $2\frac{11}{12}$. (ii) a^2+b^2.

14. (a) 68, 132, 196, 260. (b) 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52.

15. 13. 16. (a) (i) -120. (ii) $\frac{210}{a}$. (iii) -34. (iv) 210.

(v) $165\sqrt{3}$. (vi) $\frac{3}{2}n(n+7)$. (vii) $n(a^2+b^2)-n(n-3)ab$.

(viii) $\frac{2-n+n^2}{2}$. (ix) 3380. (x) 1125. (b) (i) 19096. (ii) 247.

17. (*a*) 16549. (*b*) 440.
18. (*a*) 12. (*b*) 8 বা 11 ; কারণ নবম, দশম ও একাদশ পদ তিনটির যোগফল শূন্য।
(c) 3 ; 10. (*d*) 345. **19.** (*a*) 14, 26, 38,...... ; 170 ; 12.
(*b*) −256. (*d*) 63 : 61. (*f*) 480. (*g*) 0.
20. (*a*) $\frac{1}{2}n(3n-1)$. (*b*) $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$.
21. (*a*) (i) $\frac{1}{2}n(6n^2+21n+23)$. (ii) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.
(iii) $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. (iv) $\frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$. (v) $n^2(2n^2-1)$.
(vi) $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$. (vii) $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$.
(viii) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. (ix) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$. (x) $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$.
(xi) $n(4n^2+9n+6)$. (xii) $\dfrac{n}{2n+1}$.
(xiii) $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. (xiv) $\frac{1}{6}n(8n^2+3n+1)$.
(*b*) (i) $(-1)^{n+1}n$. (ii) $n+1$. (iii) $-n(2n+1)$.
(iv) $(n+1)(2n+1)$. (v) $\frac{3}{2}(n+1)(n+2)$. (c) 8270.
22. (*a*) $\frac{1}{3}(n+1)(n+2)$. (*d*) 26.
25. (*a*) 5, 7, 9. (*c*) $2\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}$. (*d*) 1, 2, 3, 4, 5.
26. 5 অথবা 12. **27.** (*a*) 667 টা. 95 প. (*b*) 34 মিনিট।
28. 17. **29.** 51 টাকা। **30.** 20 টাকা 21 পয়সা ; 7338 টাকা।
31. 10 কিলোমিটার 100 মিটার। **32.** 15 ঘণ্টা।

প্রশ্নমালা V (B)

1. (*a*) $-\frac{1}{32}, -\frac{1}{2048}$; $(-1)^{n-1}.2^{5-n}$. (*b*) $e^{(2n-1)x}$. **2.** 10.
3. না। **4.** 8. **5.** 4. **6.** $\sqrt[9]{\frac{1}{2}}$. **7.** 64. **8.** $\frac{5}{2}$, 10, 40,··· ; 640.
9 (*a*). 3, 6, 12, 24,......অথবা, 3, −6, 12, −24,··· ; 192.
(*b*) $\sqrt{mn}$, $m\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p}{2q}}$. **10.** (*b*) $\left(\frac{d^{p-1}}{c^{q-1}}\right)^{\frac{1}{p-q}}$; $\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{p-q}}$.

11. 1, ±2, 4, ±8,...... ; 512 বা −512. **13.** (i) 9. (ii) $\frac{1}{6}$.
14. (*a*) 6, 18, 54 বা −6, 18, −54. (*b*) $\pm 5\frac{1}{3}$, 8, ±12, 18, ±27.
16. (*a*) (i) 255. (ii) $\frac{9841}{3}(3+\sqrt{3})$. (iii) $\frac{1}{4}(1-3^{20})$.
(iv) $2^{\frac{3-n}{2}}(\sqrt{2}+1)(2^{\frac{n}{2}}-1)$. (v) $\frac{2}{3}(\sqrt{6}-2)\{1-(-1)^n(\frac{3}{2})^{\frac{n}{2}}\}$.
(vi) 728. (vii) 127. (viii) $4\frac{1361}{4096}$.
(*b*) (i) 1530. (ii) $2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$. **17.** (*a*) 40. (*b*) 3069.

18. (*a*) 9. (*b*) 6138. **19.** (*a*) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots\cdots$; $\frac{1}{4096}$; $\frac{1}{2}$.

(*b*) $\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)$. (*c*) 95232.

20. (*a*) (i) $\frac{1}{3}\{\frac{10}{9}(10^n-1)-n\}$. (ii) $\frac{4}{9}\{\frac{10}{9}(10^n-1)-n\}$.

(iii) $\frac{7}{9}\left\{n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right\}$. (iv) $n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$.

(v) $\frac{1}{4}(3^{n+1}-3-2n)$. (vi) $(n-1)2^n+1$.

(vii) $\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}-\frac{2}{8}(3n-2)(-\frac{1}{2})^n$.

(viii) $\frac{1-a^n}{(1-a)^2}-\frac{na^n}{1-a}$. (ix) $3.2-2n-3$. (x) 3^n-n-1.

(*b*) (i) $\frac{16}{21}\{1-(\frac{3}{4})^{2n}\}$. (ii) $2^{28}(2^8-1)$.

21. (*a*) $2^{n+1}(2n-1)+2$. (*b*) 8. (*c*) 7.

24. সাধারণ অনুপাত 2 ; প্রথম পদ 5. **25.** (*b*) 3, 27. (*c*) 9 : 1.

26. (*a*) 8, 12, 18, বা 18, 12, 8. (*b*) 9, 6, 4.

27. 4, 8, 16 বা 16, 8, 4. **28.** 73. **29.** 1, 4, 16, 64 বা 64, 16, 4, 1.

30. $\frac{7600}{81}$ মিটার। **31.** 1947484 টাকা ক্ষতি। **32.** 6561 টাকা।

প্রশ্নমালা V (C)

1. $-\frac{3}{7}, \frac{3}{17-2n}$. **2.** দশম। **3.** $\frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{1}{\;}, \frac{3}{10}, \cdots$; $\frac{3}{n+6}$.

4. $\frac{mn}{p}$. **5.** (i) $4\frac{4}{5}$. (ii) $\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

6. (*a*) $3\frac{1}{5}, 2\frac{2}{3}, 2\frac{2}{7}$. (*b*) $\frac{3}{14}, \frac{3}{13}, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{3}{10}$. **8.** (*a*) 3, 12.

প্রশ্নমালা VI (A)

1. (i) $-7, 8$. (ii) $-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$. (iii) $\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}$. (iv) 2, 10.

(v) $\frac{1}{2}(-7\pm\sqrt{5})$. (vi) $\frac{1}{10}(1\pm\sqrt{41})$. (vii) 0, 4.

(viii) $1, \frac{9}{4}$. (ix) $1, -\frac{5}{2}$. (x) 0, 2.

2. (i) $x=3, y=2$; $x=-2, y=-3$.

(ii) $x=-1, y=1$; $x=-4, y=2$.

(iii) $x=3, y=6$; $x=6, y=3$.

(iv) $x=2, y=3$; $x=\frac{4}{3}, y=\frac{9}{2}$.

(v) $x=5, y=2$; $x=\frac{4}{7}, y=-\frac{20}{21}$.

(vi) $x=4, y=15$; $x=6, y=10$.

(vii) $x=1, y=2$; $x=2, y=1$.

(viii) $x=4, y=3$; $x=-21, y=28$.

(ix) $x=1, y=4$; $x=4, y=1$.

(x) $x=1, y=2$; $x=2, y=1$.

(xi) $x=\frac{1}{5}, y=5$; $x=\frac{4}{5}, y=20$.

(xii) $x=1, y=8$; $x=8, y=1$.

(xiii) $x=1, y=3$; $x=3, y=1$.

(xiv) $x=2, y=8$; $x=8, y=2$.

(xv) $x=1, y=3, z=5$; $x=-1, y=-3, z=-5$.

(xvi) $x=2, y=1, z=-1$; $x=-2, y=-1, z=1$.

3. (i) অভেদ। (ii) সমীকরণ। (iii) অভেদ।

4. (*a*) (i) বাস্তব, মূলদ ও অসমান। (ii) বাস্তব, অমূলদ ও অসমান।

(iii) বাস্তব, অমূলদ ও অসমান। (iv) বাস্তব, মূলদ ও সমান।

(v) কাল্পনিক ও অসমান।

6. (*a*) (i) বাস্তব, অসমান এবং উভয়ই ধনাত্মক।

(ii) বাস্তব, অসমান এবং উভয়ই ঋণাত্মক

(*b*) (i) a ও c-এর চিহ্ন b-এর চিহ্নের বিপরীত হইবে।

(ii) a, b, c সমচিহ্নের হইবে। (iii) $b=c=0$.

8. (*a*) ± 12. (*b*) 1, 4. **10.** (*a*) 0. (*b*) $-\frac{7}{11}$.

11. (i) $\frac{b^2-2ca}{a^2}$. (ii) $\pm\frac{(b^2-ca)\sqrt{b^2-4ca}}{a^3}$.

(iii) $\frac{b^4-4ab^2c+2c^2a^2}{a^4}$. (iv) $\frac{3abc-b^3}{c^3}$. (v) $\frac{3abc-b^3}{a^2c}$.

(vi) $\frac{b^2(b^2-4ac)}{a^2c^2}$. (vii) $\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{a^2}$.

viii) $\frac{b^3-3abc}{a^3c^3}$.

12. (i) $\pm p\sqrt{p^2-4q}$. (ii) $pq^4(p^2-3q)$. (iii) $\frac{p^2-2q}{q^2}$.

(iv) $\frac{p^4-4p^2q+2q^2}{q}$. (v) $\frac{\pm p(p^2-2q)\sqrt{p^2-4q}}{q^3}$.

(vi) $\frac{a(p^2-2q)+bp}{a^2q+abp+b^2}$. (vii) $\frac{p(p^2-q)(p^2-4q)}{q}$.

(viii) $\frac{p^4-4p^2q+2q^2}{q^4}$.

14. (i) $-3\frac{1}{8}$. (ii) $14\frac{1}{18}$. (iii) $\pm\frac{1}{4}\sqrt{33}$. (iv) $-2\frac{1}{8}$. (v) $-\frac{25}{32}$.

15. (*a*) (i) $x^2-3x+2=0$. (ii) $x^2+2x-15=0$.

(iii) $x^2+14x+48=0$. (iv) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$.

(v) $x^2-\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)x+1=0$.

(*b*) (i) $x^2-4x+1=0$. (ii) $4x^2-6x+1=0$. (iii) $x^2-6x+21=0$.

(iv) $13x^2-10x+13=0$. (v) $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$.

16. (i) $55-24\sqrt{-3}$. (ii) 1. (iii) -1.

17. (i) $a^2x^2+abx+25ac-6b^2=0$.

(ii) $a^3x^2-(3abc-b^3)x+c^3=0$.

(iii) $c^2x^2+(2ac-b^2)x+a^2=0$.

(iv) $bcx^2+(ac+b^2)x+ab=0$.

(v) $a^2c^2x^2-(a^2b^2+b^2c^2-2a^3c-2ac^3)x+(b^2-2ac)^2=0$.

18. (i) $qx^2-p(q+1)x+(q+1)^2=0$.

(ii) $qx^2+p(3q-p^2)x+q^2=0$.

(iii) $x^2-(p^2-4q)x+(4q-p^2)q=0$.

(iv) $x^2-(5p+2)x+(1+5p+q+6p^2)=0$.

(v) $qx^2-p(p^2-2q)x+p^2q=0$.

19. (*a*) $4x^2-10(1+m)x+4m^2+17m+4=0$.

(*b*) $x^2-68x+256=0$. (*d*) $4x^2-15x+18=0$.

(*e*) $3x^2-18x+2=0$. (*f*) $9x^2-79x+25=0$.

(*g*) $2x^2-(2\sqrt{q}-p)x-p\sqrt{q}=0$. (*h*) $3x^2-19x+3=0$.

20. (*a*) 4, 8. (*b*) $6x^2-12x-19=0$.

(*c*) $(r-1)^2x^2-a(r^2-1)x+a^2r=0$.

24. (*a*) α^{-2}, β^{-2} যদি $x^2+ax+b=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α, β হয়।

25. (*a*) $2(b+q)-ap$; $2(a^2-2b+p^2-2q-ap)$.

27. (*a*) 1 অথবা -3.

প্রশ্নমালা VI (B)

1. $(2x-3y+4)$ এবং $(3x+2y+1)$.

2. 2 ; $(4x-2y+1)$ এবং $(3x-y+2)$. **5.** $a+b=0$.

6. (i) ধনাত্মক। (ii) ঋণাত্মক। (iii) ধনাত্মক।

7. x-এর মান -5 এবং 1-এর মধ্যে থাকিবে।

8. (*a*) $a \leqslant \frac{2}{3}$. (*b*) x-এর মান 3 এবং 5-এর মধ্যবর্তী হইবে।
10. (*a*) 7 ; $\frac{1}{2}$. **11.** (*b*) 4, 4. **12.** (*a*) $\frac{26}{3}$.
13. (*b*) $(aa'-bb')^2+4(hb'+ah')(bh'+a'h)=0$.
18. $7, \frac{1}{7}$. **19.** 4. **20.** $3, \frac{1}{3}$; $-1, 1$.

প্রশ্নমালা VII (A)

1. 120 ; 1680 ; 1320.
2. (i) 5. (ii) 2. (iii) 6. (iv) 6. (v) $m=7$, $n=3$.
4. 336. **5.** 132. **6.** 650. **7.** 720.
8. (i) 60. (ii) 1260. (iii) 20160. (iv) 3326400. (v) 10810800.
10. 120960. **11.** 967680. **12.** (*a*) 240. (*b*) 360.
13. 576. **14.** 40320, 5040, 720, 4320. **15.** 720 ; 600 ; 96.
16. 12. **17.** 604800. **18.** 5040. **19.** (*a*) 2903040. (*b*) 32659200.
21. 12. **22.** $39!/\{5!(4!)^2.(6!)^3\}$. **23.** 72.
24. (*a*) 288. (*b*) 54. (*c*) 120. (*d*) 111. **25.** 154.
26. 60 বা 216. **27.** 4096. **29.** (*a*) 5040. (*b*) 720. (*c*) 360.
30. 28800 (টেবিল সম্পর্কে), 2880 (আপেক্ষিক অবস্থানে), 1440 (দিকের প্রভেদ না ধরিয়া)। **31.** 20160, 2520 (আপেক্ষিক অবস্থানে)।
32. (i) 240. (ii) 480.

প্রশ্নমালা VII (B)

1. 220 ; 1820. **2.** (i) 6. (ii) $n=34, r=13$.
3. (i) 21. (ii) 351. (iii) $n-1$.
4. (i) $n=8, r=4$. (ii) $n=3, r=2$. (iii) 5. **7.** 924.
8. $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$; $\frac{1}{2}n(n-3)$. **9.** 840. **10.** 1716.
12. (i) 196. (ii) 252. **13.** $\frac{(890)!}{(80)!.(810)!}$. **14.** 4872.
15. 1960 ; 1540. **16.** 462 ; 252. **17.** 180. **18.** 120.
19. 25. **20.** (*a*) 540. (*b*) 1728.
21. $\frac{1}{2}n(n-1)-\frac{1}{2}m(m-1)+1$;
$\frac{1}{6}\{n(n-1)(n-2)-m(m-1)(m-2)\}$.
22. 3360. **23.** 16. **24.** (*a*) 15. (*b*) 47. (*c*) 26.
26. (*a*) 167. (*b*) 119 ; 3255. **27.** $\frac{(22)!}{2!.\{(11)!\}^2}$.
28. 369600, 15400. **29.** (*a*) $\frac{(52)!}{\{(13)!\}^4}$. (*b*) $\frac{(pq)!}{(q!)^p}$.
30. (*a*) 1716 ; 924 ; 6. **31.** 53 ; 758.

প্রশ্নমালা VIII (A)

1. (i) $32+80a+80a^2+40a^3+10a^4+a^5$.
(ii) $x^{12}-6x^{10}+15x^8-20x^6+15x^4-6x^2+1$.
(iii) $128x^7-1344x^6y+6048x^5y^2-15120x^4y^3+22680x^3y^4$ $-20412x^2y^5+10206xy^6-2187y^7$.
(iv) $b^8c^8-8a^2b^7c^7+28a^4b^6c^6-56a^6b^5c^5-70a^8b^4c^4$ $-56a^{10}b^3c^3+28a^{12}b^2c^2-8a^{14}bc+a^{16}$.
(v) $x^7+7x^5+21x^3+35x+\frac{35}{x}+\frac{21}{x^3}+\frac{7}{x^5}+\frac{1}{x^7}$.
(vi) $x^{16}-8\sqrt{2}x^{15}+56x^{14}-112\sqrt{2}x^{13}+280x^{12}$ $-224\sqrt{2}x^{11}+224x^{10}-64\sqrt{2}x^9+16x^8$.
(vii) $\frac{64}{729}x^6-\frac{32}{27}x^4+\frac{20}{3}x^2-20+\frac{135}{4x^2}-\frac{243}{8x^4}+\frac{729}{64x^6}$.
(viii) $54+270x^2+90x^4+2x^6$.
2. (i) 82. (ii) $2+24a^2-24a^4$. 3. $1+7x+7x^2-49x^3$.
4. $1+nx+\frac{1}{2}n(n+1)x^2+\frac{1}{6}n(n-1)(n+4)x^3$.
5. (i) -414720. (ii) $-2288y^3$. (iii) -792. (iv) $10c^9$.
6. (i) $\frac{1792}{9}$. (ii) 495. 10. 5. 11. (a) $\frac{(m+n)!}{m!.n!}$. (b) -15.
12. -7. 13. দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ ; 1152. 14. p.
15. (i) $1120x^4y^4$. (ii) $\frac{(2m)!}{(m!)^2}x^m$.
16. (i) $-35\frac{x}{y}$, $35\frac{y}{x}$. 18. (i) 11. (ii) 7. 21. $a=2$, $x=1$, $n=7$.
22. (i) 462. (ii) ${}^{10}C_6.3^4.5^6$.
23. (i) 198×5^7. (ii) 1792. (iii) ${}^{13}C_5.2^{18}.3^{21}$. (iv) -524880000.
32. (i) 1·1255. (ii) 96059601.

প্রশ্নমালা VIII(B)

1. (i) $1-2x^2+3x^4-4x^6+\cdots\cdots$
(ii) $\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{a^3}+\frac{3}{8}\frac{x^5}{a^5}+\frac{5}{16}\frac{x^7}{a^7}+\cdots\cdots$.
(iii) $1+2x+5x^2+\frac{40}{3}x^3+\cdots\cdots$
(iv) $x^{-\frac{4}{3}}+\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{14}{9}x^{\frac{2}{3}}+\frac{140}{81}x^{\frac{5}{3}}+\cdots\cdots$. (v) $1-x-x^2-\frac{5}{3}x^3-\cdots$
(vi) $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\cdots\cdots$.

2. (i) $2^{\frac{2}{3}}(1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{36}x^2-\frac{1}{162}x^3-\frac{7}{3888}x^4-\cdots\cdots)$.

(ii) $3^{-\frac{3}{4}}(1-\frac{1}{2}x+\frac{7}{24}x^2-\frac{77}{432}x^3+\frac{385}{3456}x^4-\cdots\cdots)$.

(iii) $1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+\cdots\cdots$.

(iv) $1+\frac{1}{5}x-\frac{2}{25}x^2+\frac{6}{125}x^3-\frac{21}{625}x^4+\cdots\cdots$.

3. $\frac{1}{3}(1+\frac{9}{2}x+\frac{27}{2}x^2+\frac{135}{4}x^3+\frac{1215}{16}x^4+\cdots\cdots)$; $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$.

4. $2+18x^2+50x^4+\cdots\cdots$; $-1<x<1$.

5. $1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\frac{63}{256}x^5+\cdots\cdots$.

6. $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{7}{16}x^3-\cdots\cdots$; $1+\frac{3}{2}x+\frac{19}{8}x^2+\frac{47}{16}x^3+\cdots\cdots$.

7. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\cdots\cdots$. 8. $\frac{7}{128}(\frac{3}{4}x)^6$.

9.(a) $\frac{1}{6}(r+1)(r+2)(r+3)x^r$. (b) $\frac{3.5.7\cdots\cdots(2r+1)}{r\,!}x^r$.

10.(a) $-\frac{5}{16}$. (b) 121.

11.(i) 2^n. (ii) $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)\cdots\cdots(m+n)}{n\,!}$.

(iii) $\frac{(m+1)(2m+1)(3m+1)\cdots\cdots\{(n-1)m+1\}}{n\,!}$.

(iv) $4n$. (v) n^3+3n. (vi) 3^n-2^n. (vii) $n+1$.

(viii) $\frac{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)}{n\,!}2^n$.

13. (i) t_4. (ii) t_5. (iii) t_6. 15. t_4 এবং t_5.

16. (i) t_3. (ii) t_4 এবং t_5. (iii) t_8 এবং t_9. 17. t_9.

22. (i) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. (ii) $2^{\frac{2}{3}}$. (iii) $\sqrt{\frac{1}{2}}$. (iv) $3\sqrt{3}$.

24. (i) ·9950. (ii) 10·0033. (iii) 4·9980. (iv) 1·0141.

প্রশ্নমালা IX

1. 27. 2. $13\frac{8}{9}$. 3. $3\frac{29}{32}$. 4. $\frac{5}{14}$. 5. $1\frac{1}{9}$. 6. $1\frac{9}{11}$.

7. $2\sqrt{2}$. 8. $\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})$. 9. $\frac{1}{2}(5+3\sqrt{3})$. 10. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

11. $\frac{1+x}{1+2x}$. 12. $\frac{ax+b}{x^2-1}$. 13. $\frac{1}{8}$. 14. $\frac{1}{(1-a)^2}$. 15. $\frac{2+x}{(1-x)^2}$.

16. $\frac{1-3x}{(1+x)^2}$.

18. (i) $\frac{1}{3}$. (ii) $\frac{4}{11}$. (iii) $\frac{1}{2}$. (iv) $\frac{27}{22}$.

19. $\frac{5}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\cdots\cdots$, অথবা, $\frac{5}{8}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\cdots\cdots$

20. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\cdots\cdots$, অথবা, $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\cdots\cdots$

21. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$ 22. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots$

প্রশ্নমালা X (A)

1. (i) 3. (ii) 4. (iii) 6. (iv) $-\frac{4}{5}$. 2. 5. 3. 1728.
4. 12·5. 5. (a) $x=\frac{y}{y-1}$. (b) $m=\frac{n^2}{n-1}$.
11. (i) 1. (ii) −1. (iii) 1. (iv) log 3.
12. (i) 2. (ii) 0. 15. $\pm\frac{1}{2}$.

প্রশ্নমালা X (B)

1. (i) 1·0791813. (ii) 1·6532126. (iii) 1·8750613.
(iv) ·7043652. (v) $\bar{1}$·2730013. (vi) $\bar{2}$·1760913.
(vii) $\bar{3}$·7323939. (viii) $\bar{1}$·9214910. (ix) $\bar{6}$·2007583.
(x) 3·3922159. 2. (i) 3·631. (ii) 4·227.
3. (i) 0. (ii) 2. (iii) −1. (iv) −2. (v) −3.
4. (i) 0·69897. (ii) 1·27875. (iii) 2·17319. (iv) 3·5874.
(v) $\bar{1}$·36922. (vi) $\bar{2}$·0086. (vii) $\bar{3}$·91328. (viii) $\bar{6}$·36173.
5. (i) 1·0247. (ii) 1·5733. (iii) 221·62. (iv) 70194.
(v) 0·23174. (vi) 0·029376. (vii) 0·41029. (viii) 0·0019588.
6. (i) 6. (ii) 13, 7. 3টি। 8. অষ্টম অঙ্ক।
10. 2·8019132 ; ·6337436. 11. 191·5631. 12. ·06974.
13. 18·24. 14. 2·3022. 15. 1·4777. 16. 3·04.
17. 259·569. 18. (i) ·59883. (ii) 2·5454. (iii) 9·0762. (iv) 1·3304.
20. 10·5675. 21. (i) 1·5933. (ii) 1·2062. (iii) 1·7692. (iv) ·02999.
22. (i) $x=2·71, y=1·71$. (ii) $x=·41, y=5·66$.
23. 13310. 25. 5 বার।

প্রশ্নমালা XI (A)

1. 1695·5 টাকা (প্রায়)। 2. 9870 টাকা (প্রায়)।
3. 959 টাকা 80 পয়সা (প্রায়)। 4. 5·9%. 5. 4·06%. 6. 3075 টাকা।
7. 4936 টাকা 90 পয়সা। 8. 625 টাকা। 9. 906 টাকা (প্রায়)।
10. 17·5 বৎসরে (প্রায়)। 11. 22·5 বৎসর (প্রায়)। 14. 4·2%.
15. বার্ষিক 4% ; 10,000 টাকা। 16. 13843 টা., 13517 টা, 11691 টা.।
17. 1098·42 টাকা (প্রায়)। 18. 6711·70 টাকা (প্রায়)।
19. 2,00,000 টাকা। 20. 3486 টাকা 60 পয়সা (প্রায়)।
21. 5·4 বৎসর (প্রায়)। 22. 5·7% (প্রায়)। 23. 17 বৎসরে (প্রায়)।
24. ·2821 অংশ (প্রায়)। 25. 630 টাকা 50 পয়সা।

প্রশ্নমালা XI(B)

1. 5582 টাকা। . 2190·28 টাকা ; 1449·50 টাকা।
3. 811 টাকা 6 পয়সা (প্রায়)। 4. 25,000 টাকা। 5. 20 বৎসর। 6. $2\frac{1}{4}$%.
7. 20 বৎসর (প্রায়)। 8. 787·71 টাকা (প্রায়)। 9. 2466 টাকা (প্রায়)।
10. 2,313 টাকা 44 পয়সা (প্রায়)। 11. 1,444 টাকা 53 পয়সা (প্রায়)।
12. 13,957 টা. (প্রায়)। 13. 15,644 টা (প্রায়)। 14. 226·41 টা. (প্রায়)।
15. 26,686 টাকা (প্রায়)। 16. 14,480 টাকা (প্রায়)।
17. 3580 টাকা (প্রায়)। 18. 5628 টাকা (প্রায়)। 19. দ্বিতীয়টি।
20. 12075 টাকা। 21. 2755 টাকা (প্রায়)। 22. 2408 টাকা (প্রায়)।
23. 5,439 টাকা 71 পয়সা (প্রায়)। 24. 2,266 টাকা (প্রায়)।
25. 528·2 টাকা (প্রায়)।

প্রশ্নমালা XII(A)

9. $\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$. 10. $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$. 11. $3e$. 12. $2e$. 13. $5e$.

14. $15e$. 15. $\frac{e-1}{e+1}$. 16. $\frac{e^2+1}{e^2-1}$. 17. (a) $\sqrt{e}$. (b) $\frac{1}{e}$.
18. $2(e+1)$. 19. $4e$. 20. (a) $5e$. (b) $10e-4$. 21. $27e$.
22. 4. 23. (i) $(-1)^n.\frac{(n+1)^2}{n!}$. (ii) $(-1)^n\left\{\frac{1}{n!}-\frac{a}{(n-1)!}-\frac{1}{(n-2)!}\right\}$.
24. 2·71828, 0·36788.

25. (a) (i) $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\cdots\cdots$ (ii) $4+\frac{2+2}{1!}x+\frac{2^2+2}{2!}x^2+\cdots\cdots$.
(b) $2\left\{1+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}+\frac{2^6x^6}{6!}+\cdots\cdots\right\}$.

প্রশ্নমালা XII (B)

9. $\log_e 3$. 10. $1-\log_e 2$. 11. $\log_e\left(\frac{8}{e}\right)$ 12. 0.
13. $1+\frac{1-x}{x}\log_e(1-x)$. 14. $\left(1-\frac{2}{x}\right)\log_e(1-x)-2$.
15. $\frac{1}{2}\log_e 3$. 16. $n\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
17. $2\,x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7-\frac{2}{9}x^9+\cdots\cdots)$.
18. $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{4}x^4+\cdots\cdots$,
$-\frac{1}{2n}+(-1)^{n-1}.\frac{1}{n}$, $\frac{1}{2n+1}$.

LOG-TABLES
&
ANTI-LOG TABLES

LOGARITHMS OF NUMBERS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119	02531	02938	03342	03743	42	83	125	166	208	248	290	331	373
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070	06446	06819	07188	07555	38	76	114	152	190	227	265	302	340
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691	10037	10380	10721	11059	35	70	105	140	175	209	243	278	313
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033	13354	13672	13988	14301	32	65	97	129	162	193	225	258	290
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137	16435	16732	17026	17319	30	60	90	120	150	180	210	240	270
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033	19312	19590	19866	20140	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748	22011	22272	22531	22789	26	53	79	105	132	158	184	210	237
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304	24551	24797	25042	25285	25	50	74	99	124	149	174	199	223
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717	26951	27184	27416	27646	23	47	70	94	117	141	164	188	211
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003	29226	29447	29667	29885	22	45	67	89	111	134	156	178	201
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	21	42	64	85	106	127	148	170	191
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044	20	40	61	81	101	121	141	162	182
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	19	39	58	77	97	116	135	154	174
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	19	37	56	74	93	111	130	148	167
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	18	36	53	71	89	107	124	142	160
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	17	34	51	68	85	102	119	136	153
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	16	33	49	66	82	98	115	131	148
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	16	32	47	63	79	95	111	126	142
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090	15	30	46	61	76	91	106	122	137
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	15	29	44	59	74	88	103	118	132

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	14	29	43	57	72	86	100	114	129
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	14	28	42	55	69	83	97	110	125
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188	51322	51455	51587	51720	13	27	40	54	67	80	94	107	121
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	13	26	39	52	65	78	91	104	117
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	13	25	38	50	63	76	88	101	113
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	12	24	37	49	61	73	86	98	110
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	12	24	36	48	60	71	83	95	107
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	12	23	35	46	58	70	81	93	104
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	11	23	34	45	57	68	79	90	102
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	11	22	33	44	55	66	77	88	99
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172	11	21	32	43	54	64	75	86	97
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	10	21	31	42	52	63	73	84	94
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	10	20	31	41	51	61	71	82	92
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246	10	20	30	40	50	60	70	80	90
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225	10	20	29	39	49	59	68	78	88
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181	10	19	29	38	48	57	67	76	86
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	9	19	28	37	47	56	65	75	84
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034	9	18	27	37	46	55	64	73	82
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	9	18	27	36	45	53	62	71	80
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	9	18	26	35	44	53	61	70	79
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672	9	17	26	34	43	52	60	69	77
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517	8	17	25	34	42	51	59	67	76
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346	8	17	25	33	42	50	58	66	75
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159	8	16	24	32	41	49	57	65	73
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957	8	16	24	32	40	48	56	64	72

LOGARITHMS OF NUMBERS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	8	16	23	31	39	47	55	62	70
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511	8	15	23	31	39	46	54	62	69
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268	8	15	23	30	38	45	53	60	68
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012	7	15	22	30	37	45	52	59	67
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743	7	15	22	29	37	44	51	58	66
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462	7	14	22	29	36	43	50	57	65
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169	7	14	21	28	35	42	49	56	64
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865	7	14	21	28	35	42	49	56	63
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550	7	14	21	27	34	41	48	55	[illegible]
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224	7	13	20	27	34	40	47	54	60
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889	7	13	20	26	33	40	46	53	59
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543	7	13	20	26	33	39	46	52	59
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187	6	13	19	26	32	39	45	52	58
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822	6	13	19	25	32	38	44	50	57
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448	6	13	19	25	31	37	44	50	56
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065	6	12	18	25	31	37	43	49	55
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673	6	12	18	24	30	36	42	49	55
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273	6	12	18	24	30	36	42	48	54
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864	6	12	18	24	30	35	41	47	53
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448	6	12	18	23	29	35	41	47	52

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024	6	12	17	23	29	35	40	46	52
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593	6	11	17	23	29	34	40	46	51
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154	6	11	17	22	28	34	39	45	50
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708	6	11	17	22	28	33	39	44	50
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255	5	11	16	22	27	33	38	44	49
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795	5	11	16	22	27	32	38	43	49
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328	5	11	16	21	27	32	37	43	48
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855	5	11	16	21	26	32	37	42	47
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169	92221	92273	92324	92376	5	10	16	21	26	31	36	42	47
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891	5	10	15	21	26	31	36	41	46
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399	5	10	15	20	25	30	36	41	46
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902	5	10	15	20	25	30	35	40	45
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399	5	10	15	20	25	30	35	40	45
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890	5	10	15	20	25	29	34	39	44
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376	5	10	15	19	24	29	34	39	44
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856	5	10	14	19	24	29	34	38	43
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332	5	9	14	19	24	29	33	38	43
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802	5	9	14	19	24	28	33	38	42
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267	5	9	14	19	23	28	33	37	42
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727	5	9	14	18	23	28	32	37	41
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182	5	9	14	18	23	27	32	36	41
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632	5	9	14	18	23	27	32	36	41
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078	4	9	13	18	22	27	31	36	40
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520	4	9	13	18	22	26	31	35	40
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957	4	9	13	17	22	26	30	35	39

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	10000	10023	10046	10069	10093	10116	10139	10162	10186	10209	2	5	7	9	12	14	16	19	21
·01	10233	10257	10280	10304	10328	10351	10375	10399	10423	10447	2	5	7	10	12	14	17	19	21
·02	10471	10495	10520	10544	10568	10593	10617	10641	10666	10691	2	5	7	10	12	15	17	20	22
·03	10715	10740	10765	10789	10814	10839	10864	10889	10914	10940	3	5	8	10	13	15	18	20	23
·04	10965	10990	11015	11041	11066	11092	11117	11143	11169	11194	3	5	8	10	13	15	18	20	23
·05	11220	11246	11272	11298	11324	11350	11376	11402	11429	11455	3	5	8	11	13	16	18	21	24
·06	11482	11508	11535	11561	11588	11614	11641	11668	11695	11722	3	5	8	11	13	16	19	21	24
·07	11749	11776	11803	11830	11858	11885	11912	11940	11967	11995	3	5	8	11	14	16	19	22	25
·08	12023	12050	12078	12106	12134	12162	12190	12218	12246	12274	3	6	8	11	14	17	20	22	25
·09	12303	12331	12359	12388	12417	12445	12474	12503	12531	12560	3	6	9	11	14	17	20	23	26
·10	12589	12618	12647	12677	12706	12735	12764	12794	12823	12853	3	6	9	12	15	18	21	24	26
·11	12882	12912	12942	12972	13002	13032	13062	13092	13122	13152	3	6	9	12	15	18	21	24	27
·12	13183	13213	13243	13274	13305	13335	13366	13397	13428	13459	3	6	9	12	15	18	21	25	28
·13	13490	13521	13552	13583	13614	13646	13677	13709	13740	13772	3	6	9	13	16	19	22	25	28
·14	13804	13836	13868	13900	13932	13964	13996	14028	14060	14093	3	6	10	13	16	19	22	26	29
·15	14125	14158	14191	14223	14256	14289	14322	14355	14388	14421	3	7	10	13	16	20	23	26	30
·16	14454	14488	14521	14555	14588	14622	14655	14689	14723	14757	3	7	10	13	17	20	24	27	30
·17	14791	14825	14859	14894	14928	14962	14997	15031	15066	15101	3	7	10	14	17	21	24	28	31
·18	15136	15171	15205	15241	15276	15311	15346	15382	15417	15453	4	7	11	14	18	21	25	28	32
·19	15488	15524	15560	15596	15631	15668	15704	15740	15776	15812	4	7	11	14	18	22	25	29	32
·20	15849	15885	15922	15959	15996	16032	16069	16106	16144	16181	4	7	11	15	18	22	26	30	33
·21	16218	16255	16293	16331	16368	16406	16444	16482	16520	16558	4	8	11	15	19	23	26	30	34
·22	16596	16634	16672	16711	16749	16788	16827	16866	16904	16943	4	8	12	15	19	23	27	31	35
·23	16982	17022	17061	17100	17140	17179	17219	17258	17298	17338	4	8	12	16	20	24	28	32	36
·24	17378	17418	17458	17498	17539	17579	17620	17660	17701	17742	4	8	12	16	20	24	28	32	36

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
·25	17783	17824	17865	17906	17947	17989	18030	18072	18113	18155	4	8	12	17	21	25	29	33	37
·26	18197	18239	18281	18323	18365	18408	18450	18493	18535	18578	4	8	13	17	21	25	30	34	38
·27	18621	18664	18707	18750	18793	18836	18880	18923	18967	19011	4	9	13	17	22	26	30	35	39
·28	19055	19099	19143	19187	19231	19275	19320	19364	19409	19454	4	9	13	18	22	26	31	35	40
·29	19498	19543	19588	19634	19679	19724	19770	19815	19861	19907	5	9	14	18	23	27	32	36	41
·30	19953	19999	20045	20091	20137	20184	20230	20277	20324	20370	5	9	14	19	23	28	32	37	42
·31	20417	20464	20512	20559	20606	20654	20701	20749	20797	20845	5	10	14	19	24	29	33	38	43
·32	20893	20941	20989	21038	21086	21135	21184	21232	21281	21330	5	10	15	19	24	29	34	39	44
·33	21380	21429	21478	21528	21577	21627	21677	21727	21777	21827	5	10	15	20	25	30	35	40	45
·34	21878	21928	21979	22029	22080	22131	22182	22233	22284	22336	5	10	15	20	25	31	36	41	46
·35	22387	22439	22491	22542	22594	22646	22699	22751	22803	22856	5	10	16	21	26	31	37	42	47
·36	22909	22961	23014	23067	23121	23174	23227	23281	23336	23388	5	11	16	21	27	32	37	43	48
·37	23442	23496	23550	23605	23659	23714	23768	23823	23878	23933	5	11	16	22	27	33	38	44	49
·38	23988	24044	24099	24155	24210	24266	24322	24378	24434	24491	6	11	17	22	28	34	39	45	50
·39	24547	24604	24660	24717	24774	24831	24889	24946	25003	25061	6	11	17	23	29	34	40	46	51
·40	25119	25177	25236	25293	25351	25410	25468	25527	25586	25645	6	12	18	23	29	35	41	47	53
·41	25704	25763	25823	25882	25942	26002	26062	26122	26182	26242	6	12	18	24	30	36	42	48	54
·42	26303	26363	26424	26485	26546	26607	26669	26730	26792	26853	6	12	18	24	31	37	43	49	55
·43	26915	26977	27040	27102	27164	27227	27290	27353	27416	27479	6	13	19	25	31	38	44	50	56
·44	27542	27606	27669	27733	27797	27861	27925	27990	28054	28119	6	13	19	26	32	39	45	51	58
·45	28184	28249	28314	28379	28445	28510	28576	28642	28708	28774	7	13	20	26	33	39	46	52	59
·46	28840	28907	28973	29040	29107	29174	29242	29309	29376	29444	7	13	20	27	34	40	47	54	60
·47	29512	29580	29648	29717	29785	29854	29923	29992	30061	30130	7	14	21	28	34	41	48	55	62
·48	30200	30269	30339	30409	30479	30549	30620	30690	30761	30832	7	14	21	28	35	42	49	56	63
·49	30903	30974	31046	31117	31189	31261	31333	31405	31477	31550	7	14	22	29	36	43	50	58	65

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	31623	31696	31769	31842	31916	31989	32063	32137	32211	32285	7	15	22	29	37	44	52	59	66
·51	32359	32434	32309	32584	32659	32735	32809	32885	32961	33037	8	15	23	30	38	45	53	60	68
·52	33113	33189	33266	33343	33420	33497	33574	33651	33729	33806	8	15	23	31	39	46	54	62	69
·53	33884	33963	34041	34119	34198	34277	34356	34435	34514	34594	8	16	24	32	40	47	55	63	71
·54	34674	34754	34834	34914	34995	35075	35156	35237	35318	35400	8	16	24	32	40	48	56	65	73
·55	35481	35563	35645	35727	35810	35892	35975	36058	36141	36224	8	16	25	33	42	50	58	66	74
·56	36308	36392	36475	36559	36644	36728	36813	36898	36983	37068	8	17	25	34	42	51	59	68	76
·57	37154	37239	37325	37411	37497	37584	37670	37757	37844	37931	9	17	26	35	43	52	61	69	78
·58	38019	38107	38194	38282	38371	38459	38548	38637	38726	38815	9	18	27	35	44	53	62	71	80
·59	38905	38994	39084	39174	39264	39355	39446	39537	39628	39719	9	18	27	36	45	54	63	72	82
·60	39811	39902	39994	40087	40179	40272	40365	40458	40551	40644	9	19	28	37	46	56	65	74	83
·61	40738	40832	40926	41020	41115	41210	41305	41400	41495	41591	9	19	28	38	47	57	66	76	85
·62	41687	41783	41879	41976	42073	42170	42267	42364	42462	42560	10	19	29	39	49	58	68	78	87
·63	42658	42756	42855	42954	43053	43152	43251	43351	43451	43551	10	20	30	40	50	60	70	80	89
·64	43652	43752	43853	43954	44055	44157	44259	44361	44463	44566	10	20	30	41	51	61	71	81	91
·65	44668	44771	44875	44978	45082	45186	45290	45394	45499	45604	10	21	31	42	52	62	73	83	94
·66	45709	45814	45920	46026	46132	46238	46345	46452	46559	46666	11	21	32	43	53	64	75	85	96
·67	46774	46881	46989	47098	47206	47315	47424	47534	47643	47753	11	22	33	44	54	65	76	87	98
·68	47863	47973	48084	48195	48306	48417	48529	48641	48753	48865	11	22	33	45	56	67	78	89	100
·69	48978	49091	49204	49317	49431	49545	49659	49774	49888	50003	11	23	34	46	57	68	80	91	103
·70	50119	50234	50350	50466	50582	50699	50816	50933	51050	51168	12	23	35	47	58	70	82	93	105
·71	51286	51404	51523	51642	51761	51880	52000	52119	52240	52360	12	24	36	48	60	72	84	96	108
·72	52481	52602	52723	52845	52966	53088	53211	53333	53456	53580	12	24	37	49	61	73	85	98	110
·73	53703	53827	53951	54075	54200	54325	54450	54576	54702	54828	13	25	38	50	63	75	88	100	113
·74	54954	55081	55208	55336	55463	55590	55719	55847	55976	56105	13	26	38	51	64	77	90	102	115

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·75	56234	56364	56494	56624	56754	56885	57016	57148	57280	57412	13	26	39	52	66	79	92	105	118
·76	57544	57677	57810	57943	58076	58210	58345	58479	58614	58749	13	27	40	54	67	80	94	107	121
·77	58884	59020	59156	59293	59429	59566	59704	59841	59979	60117	14	27	41	55	69	82	96	110	123
·78	60256	60395	60534	60674	60814	60954	61094	61235	61376	61518	14	28	42	56	70	84	98	112	126
·79	61659	61802	61944	62087	62230	62373	62517	62661	62806	62951	14	29	43	58	72	86	101	115	130
·80	63096	63241	63387	63533	63680	63826	63973	64121	64269	64417	15	29	44	59	74	88	103	118	132
·81	64565	64714	64863	65013	65163	65313	65464	65615	65766	65917	15	30	45	60	75	90	105	120	135
·82	66069	66222	66374	66527	66681	66834	66988	67143	67298	67453	15	31	46	62	77	92	108	123	139
·83	67608	67764	67920	68077	68234	68391	68549	68707	68865	69024	16	32	47	63	79	95	110	126	142
·84	69183	69343	69503	69663	69823	69984	70146	70307	70469	70632	16	32	48	64	81	97	113	129	145
·85	70795	70958	71121	71285	71450	71614	71779	71945	72111	72277	17	33	50	66	83	99	116	132	149
·86	72444	72611	72778	72946	73114	73282	73451	73621	73790	73961	17	34	51	68	85	101	118	135	152
·87	74131	74302	74473	74645	74817	74989	75162	75336	75509	75683	17	35	52	69	87	104	121	138	156
·88	75858	76033	76208	76384	76560	76736	76913	77090	77268	77446	18	35	53	71	89	107	125	142	159
·89	77625	77804	77983	78163	78343	78524	78705	78886	79068	79250	18	36	54	72	91	109	127	145	163
·90	79433	79616	79799	79983	80168	80353	80538	80724	80910	81096	19	37	56	74	93	111	130	148	167
·91	81283	81470	81658	81846	82035	82224	82414	82604	82794	82985	19	38	57	76	95	113	132	151	170
·92	83176	83368	83560	83753	83946	84140	84333	84528	84723	84918	19	39	58	78	97	116	136	155	175
·93	85114	85310	85507	85704	85901	86099	86298	86497	86696	86896	20	40	60	79	99	119	139	158	178
·94	87096	87297	87498	87700	87902	88105	88308	88512	88716	88920	20	41	61	81	102	122	142	162	183
·95	89125	89331	89536	89743	89950	90157	90365	90573	90782	90991	21	42	62	83	104	125	146	166	187
·96	91201	91411	91622	91833	92045	92257	92470	92683	92897	93111	21	42	64	85	106	127	149	170	191
·97	93325	93541	93756	93972	94189	94406	94624	94842	95060	95280	22	43	65	87	109	130	152	174	195
·98	95499	95719	95940	96161	96383	96605	96828	97051	97275	97499	22	44	67	89	111	133	155	178	200
·99	97724	97949	98175	98401	98628	98855	99083	99312	99541	99770	23	46	68	91	114	137	160	182	205